UN MODELLO DI DANNO PER LE MURATURE

R. Luciano e E. Sacco

Dipartimento di Ingegneria Industriale, Università di Cassino
Via G. Di Biasio 43, 03043 - Cassino

SOMMARIO: Nel presente lavoro è proposto un modello di danneggiamento per il materiale muratura considerato come un composito a microstruttura periodica. Si ipotizza che le fessure si sviluppino esclusivamente nelle giunzioni di malta e che i blocchi di mattone siano linearmente elastici. Si utilizza un criterio di resistenza alla Coulomb per i letti di malta. Si presenta quindi una procedura numerica basata sulla tecnica degli elementi finiti per l'analisi di pannelli murari. E' studiato infine il comportamento di tipiche strutture murarie.

PREMESSA

La muratura è uno dei più antichi materiali strutturali. Ciò nonostante l'analisi di strutture murarie resta un difficile compito per l'ingegnere, in quanto richiede almeno lo studio di elementi bidimensionali a comportamento fortemente non lineare. La muratura infatti è soggetta a fenomeni di danneggiamento e di ampia fessurazione anche per carichi relativamente limitati. La determinazione di opportuni legami costitutivi multidimensionali per i materiali murari rappresenta un settore di ricerca di particolare interesse tutt'oggi molto attivo. Tre tipi di modelli sono stati proposti nella letteratura tecnica per lo studio del comportamento di strutture murarie: modelli continui fenomenologici, modelli discreti a blocchi, modelli continui micromeccanici. Il modello continuo fenomenologico più utilizzato, sopratutto in Italia, per il materiale muratura appare il cosidetto *materiale non resistente a trazione*. Infatti la muratura presenta una bassissima resistenza a trazione in confronto a quella a compressione, per cui potrebbe apparire giustificato considerare una resistenza a trazione nulla ed un comportamento indefinitamente elastico a compressione (Heyman, 1966;\ Romano e Sacco, 1984; Como e Grimaldi, 1985; Giaquinta e Giusti, 1985). Le strutture monumentali sono realizzate da blocchi sovrapposti a secco o tramite letti di malta. I blocchi di pietra sono schematizzati tramite elementi rigidi ovvero elastici lineari, mentre per le interfacce si utilizzano particolari legami costitutivi. Per blocchi sovrapposti a secco generalmente si ricorre a interfacce governate da legami unilaterali con attrito alla Coulomb. Studi in tal senso sono stati sviluppati adottando approcci analitici semplificati (Yim et al., 1990), o tramite schematizzazioni agli elementi finiti (Chiostrini e Vignoli, 1989; Grimaldi et al., 1992). Legami costititivi non lineari sia per il blocco che per la malta sono proposti ed utilizzati, per esempio, da Gambarotta e Lagomarsino (1994), e da Lofti e Benson Shing (1994) che forniscono anche un algoritmo numerico *return map* per l'analisi agli elementi finiti. La muratura è in realtà un materiale composito realizzato tramite l'inclusione di blocchi in una matrice di malta. Ne consegue che le teorie ed i modelli sviluppati per lo studio dei materiali compositi possono essere applicati con successo al materiale muratura. In particolare, la tecnica dell'omogeneizzazione può condurre alla determinazione delle proprietà meccaniche dei materiali eterogenei note che siano quelle dei singoli

componenti (Aboudi, 1991). In altre parole si può giungere al legame costitutivo macroscopico del mezzo a partire dal problema micromeccanico.
Il materiale muratura maggiormente utilizzato nelle costruzioni presenta una geometria regolare con i blocchi ed i letti di malta che generano una microstruttura periodica. Un approccio micromeccanico allo studio della muratura regolare è stato sviluppato in (Pande et al., 1989; Kralj et al., 1991), dove è stato utilizzato il metodo di Mori-Tanaka e quello della laminazione per determinare il comportamento in campo lineare della muratura. La stessa tecnica di omogeneizzazione è stata utilizzata da Papa (1990) per definire le proprietà elastiche del mezzo murario, ricorrendo poi ad un modello fenomenologico per il danneggiamento. Quindi, Pietruszczak e Niu (1992) e Gambarotta e Lagomarsino (1994) hanno utilizzato il metodo di Mori-Tanaka e quello della laminazione per sviluppare un'analisi non lineare del materiale muratura. Superfici limiti ammissibili nello spazio delle tensioni sono stati ottenuti in (Alpa e Monetto, 1994) per murature a secco, ed in (De Felice, 1994) nel caso di mezzi che presentano coesione tra i blocchi. Un approccio micromeccanico agli elementi finiti per mezzi murari periodici è presentato da Anthoine (1995) per il calcolo delle proprietà elastiche di tale materiale. Recentemente, è stato proposto da Luciano e Sacco (1995, 1996) un modello di danno della muratura periodica ottenuto risolvendo il problema micro-macro tramite una particolare tecnica agli elementi finiti.
Nel presente lavoro è proposto un modello di danneggiamento per il materiale muratura considerato come un composito a microstruttura periodica (Luciano e Sacco, 1995; 1996). Viene presentata una legge cinetica di danneggiamento discretizzata. Si individuano tutti i possibili stati fessurati della muratura. Si suppone a tale scopo che le fessure si sviluppino esclusivamente nelle giunzioni di malta e che i blocchi di mattone abbiano comunque un comportamento elastico lineare. Inoltre, si ipotizza che se nasce una fessura in una giunzione, essa si propaghi in tutta la giunzione. In definitiva si determinano i possibili stati per la muratura integra e danneggiata. Quindi si definiscono i possibili percorsi di danneggiamento che può subire il materiale durante l'applicazione del carico esterno. Si utilizza un criterio di resistenza locale di tipo coesivo alla Coulomb per determinare la superficie limite di rottura del materiale omogeneizzato. Inoltre il modello di danneggiamento proposto viene adottato per l'analisi non lineare di semplici strutture murarie bidimensionali. E' sviluppata una procedura numerica basata sulla tecnica degli elementi finiti. Per alcuni pannelli murari si individuano i vari tipi di collasso possibili al variare della condizione di carico e delle proprietà di resistenza della malta.

MICROMECCANICA DEL DANNO

Una muratura con regolare tessitura blocchi-malta è un composito con miscrostruttura periodica. Per studiare il comportamento del composito si ricorre alla teoria della omogeneizzazione che intende determinare le proprietà globali del composito in funzione delle proprietà dei singoli componenti, ben tenendo in conto della effettiva disposizione geometrica dei blocchi e della malta. A tale scopo è necessario individuare una cella ripetitiva del materiale. In particolare, nel seguito si considera la cella unitaria riportata in Figura 1.
Si suppone che il danneggiamento della muratura sia provocato esclusivamente dalla apertura di fessure nella malta, mentre i blocchi hanno un comportamento indefinitamente elastico lineare e non sono quindi soggetti ad alcun tipo di fessurazione.

Si ipotizza inoltre che qualora uno dei giunti di malta, denotati con i numeri da 1 a 8 in Figura 1, si cominci a fessurare, esso si fessuri completamente. In definitiva è possibile che i giunti da 1 a 8 siano integri o definitivamente fessurati. Un giunto fessurato a sua volta può trovarsi in condizione di fessura aperta ovvero chiusa. Nel seguito, si suppone che qualora il giunto fessurato sia chiuso, tra i lembi della fessura ci sia contatto unilatero senza attrito.

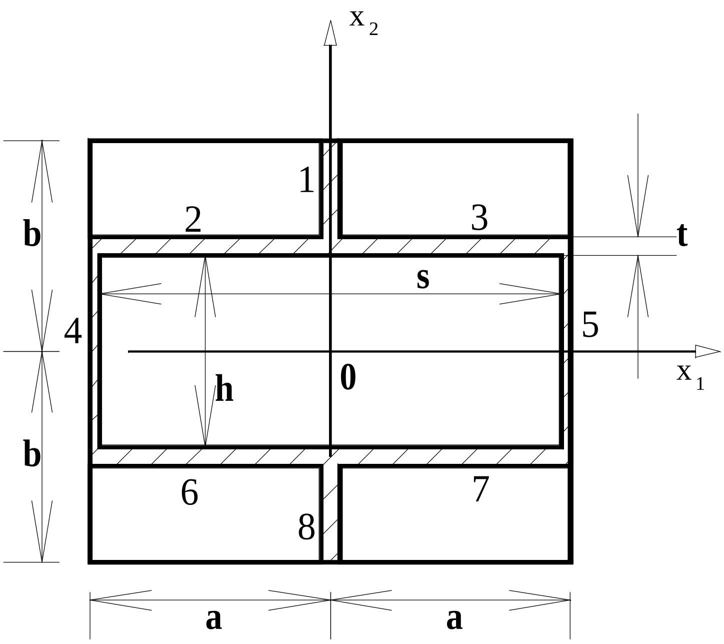

Figura 1: Cella unitaria per muratura regolare.

Le fratture devono soddisfare alcuni semplici requisiti geometrici e di periodicità. In particolare accade che la frattura nel giunto 1 è sempre accompagnata dalla frattura nei giunti 4, 5 e 8; analogamante i giunti 2 e 7 si fratturano insieme, così come i giunti 3 e 8. Tali condizioni riducono a 8 i possibili stati della cella unitaria. Gli stati della muratura indicati con s1-s8, sono definiti in tabella 1. Ad ogni stato che presenta *n* fessure corrispondono poi *2n* sottostati definiti dai casi in cui le fessure sono chiuse o aperte.

Tabella 1: Stati fessurati della muratura regolare.

Stato	*s1*	*s2*	*s3*	*s4*	*s5*	*s6*	*s7*	*s8*
Giunti fessurati	-	*1-4-5-8*	*1-2-4-5-7-8*	*1-3-4-5-6-8*	*2-7*	*2-3-6-7*	*3-6*	*tutti*

Ad ogni stato (e sottostato) s corrisponde un tensore di rigidezza elastico globale $\overline{C}(s)$ che si determina risolvendo un problema di omogeneizzazione. Per una deformazione media $\boldsymbol{\varepsilon}$ assegnata nella cella unitaria si calcolano i campi microscopici di spostamenti **v** di deformazione **E** e quindi di tensione **S**, la cui media è denotata con $\boldsymbol{\sigma}$. Si ha allora che:

$$\overline{C}(s)\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\sigma} \tag{1}$$

La legge evolutiva del danno deve imporre la naturale condizione che nella cella unitaria, durante il processo di carico assegnato nel tempo, il numero delle fratture può solo aumentare, in quanto le fratture non si possono ricucire. In Figura 2 sono allora riportati gli stati ed i 6 possibili percorsi di danno che possono verificarsi nella muratura. Nella Figura le linee più spesse indicano la presenza di fessure.

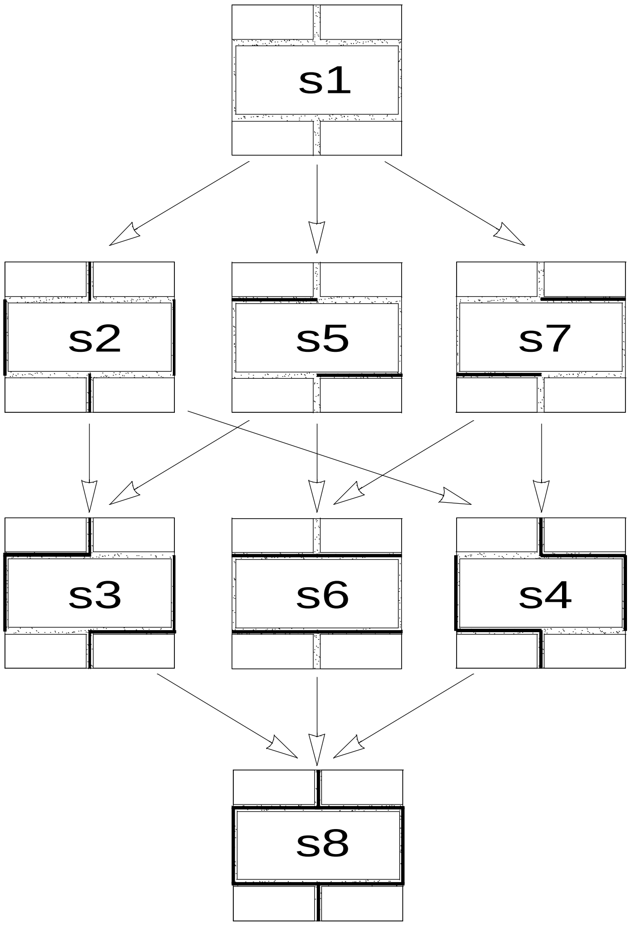

Figura 2: Stati e possibili percorsi per la muratura.

Per verificare la formazione di nuove fessure si adotta il criterio di resistenza di Coulomb con coesione. In particolare, si valuta ad ogni istante di tempo la tensione normale σ_n e tangenziale τ nel punto medio di ogni giunto di malta ancora integro, dovuta alla deformazione media ε. Se in un giunto lo stato tensionale viola il criterio di Coulomb allora si determina l'apertura di una nuova fessura. In definitiva il modello di danno che si ottiene è di tipo brutale. Infatti, il tensore elastico $\overline{C}(s)$ dipende dallo stato $s=s(t)$ che cambia nel tempo in funzione delle tensioni che si hanno nei giunti di malta. L'apertura di una nuova fessura fornisce una brusca (brutale) variazione del legame costitutivo.

ANALISI STRUTTURALE

L'analisi di una struttura muraria si conduce considerando le classiche equazioni dei mezzi continui in cui il legame costitutivo è fornito direttamente dalla (1). La formulazione variazionale del problema dell'equilibrio di un corpo murario *V*, scritta in termini di spostamenti macroscopici **u**, al generico istante *t*, assume la forma:

$$\int_V \overline{C}(s(t))\,\hat{\nabla}\mathbf{u}(t) \bullet \hat{\nabla}\mathrm{d}\mathbf{u}(t)\,dV + \mathrm{d}\Lambda(t) = 0 \tag{2}$$

dove $\hat{\nabla}$ è l'operatore che fornisce la parte simmetrica del gradiente di un vettore e $L(t)$ è il potenziale dei carichi esterni al tempo *t*. Si evidenzia che il problema evolutivo (2) è non lineare ad ogni istante di tempo. Infatti il tensore elastico $\overline{C}(s)$ nel generico punto del corpo dipende dallo stato *s(t)* che può variare in funzione della deformazione $\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \hat{\nabla}\mathbf{u}(t)$ in quel punto di *V*. La forma variazionale (2) del problema dell'equilibrio di un corpo murario è la base dello sviluppo del metodo degli elementi finiti in temini di spostamenti. Attraverso una procedura standard si approssima il problema variazionale (2) nel problema algebrico:

$$\mathbf{B}(\mathbf{U}(t)) - \mathbf{F}(t) = \mathbf{0} \tag{3}$$

dove **U**(*t*) è il vettore ordinato degli spostamenti nodali al tempo *t*, **F**(*t*) è il vettore ordinato delle forze nodali e **B**(•) è l'operatore algebrico non lineare della struttura. In particolare, **B**(**U**(*t*)) è ottenuto assemblando le quantità $\mathbf{B}^{\mathrm{i}}(\mathbf{U}(t))$ relative all'*i*-esimo elemento della discretizzazione, tale che:

$$\mathbf{B}^{\mathrm{i}}(\mathbf{U}(t)) = \int_{V_i} \mathbf{N}^T \overline{C}(s(t))\mathbf{N}\,\mathbf{U}(t)\,dV \tag{4}$$

essendo **N** la matrice delle derivate delle funzioni interpolanti il campo di spostamenti dell'*i*-esimo elemento. L'integrale al secondo membro della formula (4) si effettua per via numerica, ricorrendo al metodo di Guass. In tal modo, il tensore $\overline{C}(s(t))$ viene valutato solo nei punti di integrazione. La soluzione del problema non lineare (3), che rappresenta una soluzione approssimata del problema (2), è determinata sviluppando un opportuno algoritmo numerico di tipo iterativo.
Si evidenzia allora che l'operatore non lineare **B**(**U**(*t*)) è una funzione non continua e non differenziabile degli spostamenti **U**(*t*). Infatti, il modello di danno è di tipo brutale ed il tensore elastico $\overline{C}(s(t))$ cambia repentinamente nel passare da uno stato ad un altro. Se ne deduce che non possono essere utilizzati metodi iterativi del tipo alla Newton che richiedono la determinazione delle derivate della funzione **B**(**U**(*t*)). Si discretizza nel tempo l'equazione (3), e si propone una procedura iterativa di tipo diretta per risolvere il problema non lineare ad ogni istante di tempo t_n. A tale scopo l'equazione non lineare di equilibrio si riscrive nella forma:

$$\mathbf{K}(\mathbf{U}(t_n))\,\mathbf{U}(t_n) - \mathbf{F}(t_n) = \mathbf{0} \tag{5}$$

dove **K**(**U**(*t*)) è la matrice di rigidezza secante: $\mathbf{K}(\mathbf{U}(t_n))\,\mathbf{U}(t_n) = \mathbf{B}(\mathbf{U}(t_n))$. In definitiva, l'algoritmo numerico proposto consiste, al tempo $t=t_n$, nei seguenti passi:

1. si pone inizialmente $\mathbf{U}_n^{[1]}=\mathbf{U}_{n-1}$;
2. noto che sia il vettore spostamento $\mathbf{U}_n^{[k]}$ alla *k*-esima iterazione, nel generico punto di integrazione di Gauss si calcola la deformazione $\boldsymbol{\varepsilon}_n^{[k]}$;
3. si ritiene che $\boldsymbol{\varepsilon}_n^{[k]}$ sia la deformazione media agente sulla microstruttura periodica della muratura, e si calcolano le corrispondenti tensioni nei giunti di malta;
4. si verifica a livello micromeccanico l'aprirsi o meno di nuove fessure e cioè il nuovo stato $s_n^{[k]}$ della muratura;
5. sulla base dello stato $s_n^{[k]}$ si assume nel punto di Gauss $\overline{C}_n^{[k]} = \overline{C}(s_n^{[k]})$;
6. tramite la relazione (4) ed il successivo assemblaggio si determina $\mathbf{B}(\mathbf{U}_n^{[k]})$ e quindi la matrice di rigidezza secante $\mathbf{K}(\mathbf{U}_n^{[k]})$;
7. si determina una nuova soluzione tramite la (5) come: $\mathbf{U}_n^{[k+1]} = \left[\mathbf{K}(\mathbf{U}_n^{[k]})\right]^{-1} \mathbf{F}_n$;
8. si calcola l'errore $h = \left\| \mathbf{K}(\mathbf{U}_n^{[k+1]})\mathbf{U}_n^{[k+1]} - \mathbf{F}_n \right\|$, se h è maggiore di una prefissata tolleranza si torna al passo 2;
9. si incrementa il tempo e si va al passo 1, fino al termine del percorso di carico assegnato.

Il modello di danno e la procedura numerica proposti sono applicati nella sezione successiva.

APPLICAZIONI

Si considera la muratura riportata in Figura 1, caratterizzata dalle seguenti dimensioni geometriche:

$$h = 75 \text{ mm} \quad , \quad s = 225 \text{ mm} \quad , \quad t = 15 \text{ mm}$$

Le proprietà elastiche della malta (*m*) e dei blocchi (*b*) sono gli stessi di quelli adottati in (Kralj et al., 1991):

$$E_b = 15000 \text{ Mpa} \quad , \quad n_b = 0.25$$
$$E_m = 1000 \text{ Mpa} \quad , \quad n_m = 0.30$$

I valori delle costanti elastiche corrispondenti ai vari stati di fessurazione della muratura sono calcolati tramite la procedura agli elementi finiti proposta in (Luciano, 1996) e sono riportati in tabella 2, per il caso di fessure aperte. Per quanto riguarda la legge di danno relativa ai giunti di malta si utilizza il criterio di Coulomb con adesione. In particolare si considera il caso in cui i coefficienti di attrito e di coesione sono rispettivamente m=2 e c=2.25 MPa. Una volta definito il materiale, si sviluppa un'applicazione strutturale. Si tratta di un pannello murario di altezza H=6m e larghezza L=5m. Il muro è soggetto ad un carico verticale q=220KN/m agente sulla sommità. Inoltre al panello è imposto uno spostamento orizzontale u come mostrato in Figura 3. Quindi in Figura 4 è riportato il diagramma forze di reazione F ottenute in corrispondenza dello spostamento imposto in funzione di u. Si nota il comportamento fragile della struttura ed il brutale evolvere del danno. Inoltre, in Figura 3 sono riportati gli stati di danno della muratura quando lo spostamento orizzontale imposto in sommità vale u_A (vedi Figura 4).

CONCLUSIONI

È stato proposto un modello di danno di tipo brutale per la muratura, basato sulla ipotesi che si fessuri solo la malta. Sono determinati i possibili stati di fessurazione della muratura, e per ogni stato sono calcolati i moduli elastici globali del materiale tramite la tecnica dell'omogeneizzazione. L'analisi strutturale è sviluppata tramite una procedura di calcolo agli elementi finiti, ed un algoritmo iterativo che dalla scala macromeccanica della struttura scende al livello della microscala per verificare la formazione di nuove fratture nella cella unitaria.

Tabella 2: Moduli elastici globali per i vari stati della muratura.

Moduli (MPa)	s1	s2	s3	s4	s5	s6	s7	s8
$\overline{C}_{1111}$	8942	2761	1203	1302	8398	7967	8398	0
$\overline{C}_{2222}$	5595	5329	381	381	1343	0	1343	0
$\overline{C}_{1212}$	1562	1326	654	654	838	0	838	0
$\overline{C}_{1122}$	1578	630	677	677	530	0	530	0
$\overline{C}_{1112}$	0	0	887	-887	-386	0	386	0
$\overline{C}_{2212}$	0	0	499	-499	-202	0	202	0

Dall'esame dei risultati numerici relativi all'applicazione strutturale sviluppata, si nota il modello di danno brutale proposto cogliere il comportamento fragile non lineare del pannello murario durante le storie di carico esaminate. Inoltre, si evidenzia l'efficacia dell'algoritmo numerico messo a punto.

BIBLIOGRAFIA

Aboudi, J. (1991). Mechanics of Composite Materials, Elsevier.

Alpa, G. e Monetto, I. (1994). Microstructural model for dry block masonry walls with in-plane loading. J.Mech. Phys. Solids 42, 1159-1175.

Anthoine, A. (1995). Derivation of the in-plane elastic characteristics of masonry through homogenization theory. Int. J. Solids and Structures 32(2), 137-163.

Chiostrini, S. e Vignoli, A. (1989). Application of a numerical method to the study of masonry panels with various geometry under seismic loads. In Structural Repair and Maintenance of Historical Buildings (Edited by C.A. Brebbia), Computational Mechanics Publications.

Como, M. e Grimaldi, A. (1985) A unilateral model for the limit analysis of masonry walls. In Unilateral Problems in Structural Analysis (Edited by. G. Del Piero e F. Maceri), CISM Courses and Lectures, Vol. 288, pp. 25-45 Springer-Verlag.

De Felice, G. (1994). Failure criterion for brick masonry under in plane load: a micromechanical approach. In U.S.-Italian Workshop on Guidelines for Seismic

Evaluation and Rehabilitation of Unreinforced Masonry Buildings (Edited by D.P. Abrams e G.M. Calvi), Report NCEER-94-0021, State University of New York at Buffalo.

Gambarotta, L. e Lagomarsino, S. (1994). Damage in brick masonry shear walls. In Fracture and Damage in Quasibrittle Structures: Experiments, Modelling and Computer Analysis (Edited by Z.P. Bazant, Z. Bittnar, M. Jirasek e J. Mazars), pp. 463-372, E \& FN SPON (An Imprint of Chapman & Hall).

Giaquinta, M e Giusti, E. (1985). Researches on the equilibrium of masonry structures. Arch. Rat. Mech. Anal. 88, 359-392.

Grimaldi, A., Luciano, R. e Sacco, E. (1992). Nonlinear dynamic analysis of masonry structures via FEM. In Computing Methods in Applied Sciences and Engineering (Edited by R. Glowinski), pp. 373-382, Nova Science Publishers.

Heyman, J. (1966). The stone skeleton. Int. J. Solids and Structures 2, 249-279.

Kralj, B., Pande, G.N. e Middleton, J. (1991). On the mechanics of frost damage to brick masonry. Comp. & Struct. 41(1), 53-66.

Lofti, H.R. e Benson Shing, P. (1994). Interface model applied to fracture of masonry structures. J. Struct. Engng., ASCE, 120(1), 63-80.

Luciano, R. e Sacco, E. (1995). A micromechanical approach to the damage of the masonry material. In Structural Studies, Repair and Maintenance of Historical Buildings (Edited by B. Leftheris e C.A. Brebbia), Computational Mechanics Publications.

Luciano, R. e Sacco, E. (1996). Homogenization technique and damage model for old masonry material. In corso di stampa su Int. J. Solids Structures.

Pande, G.N., Liang, J.X. e Middleton, J. (1989). Equivalent elastic moduli for brick masonry. Comput. Geotech. 8, 243-265.

Papa, E. (1990). Sulla Meccanica del Danneggiamento con Particolare Riferimento alle Murature, Politecnico di Milano, Dipartimento di Ingegneria Strutturale, Ph.D. Thesis.

Pietruszczak, S. e Niu, X. (1992). A mathematical description of macroscopic behaviour of brick masonry. Computers Geotech. 29(5), 531-546.

Romano, G. e Sacco, E. (1984). Sul calcolo di strutture non resistenti a trazione. Atti del VII Congresso AIMETA, Trieste 2-5 ottobre 1984.

Yim, C.S., Chopra, A.K. e Penzien, J. (1990). Rocking response of rigid blocks to earthquakes. Earth. Engng. Struct. Dynamics 88, 565-572.

RINGRAZIAMENTI

Si ringraziano il Consiglio Nazionale delle Ricerche ed il Ministero dell'Università e della Ricerca Scientifica e Tecnologica per il supporto finanziario.

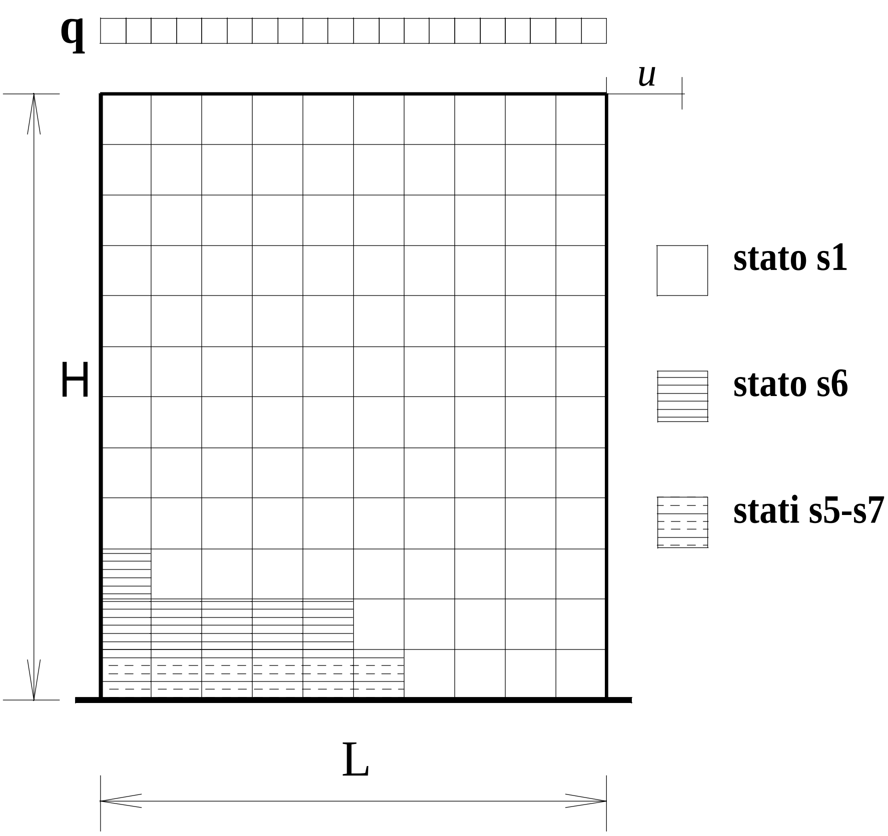

Figura 3: Stati di fessurazione per un pannello murario soggetto ad un carico verticale ed allo spostamento imposto u.

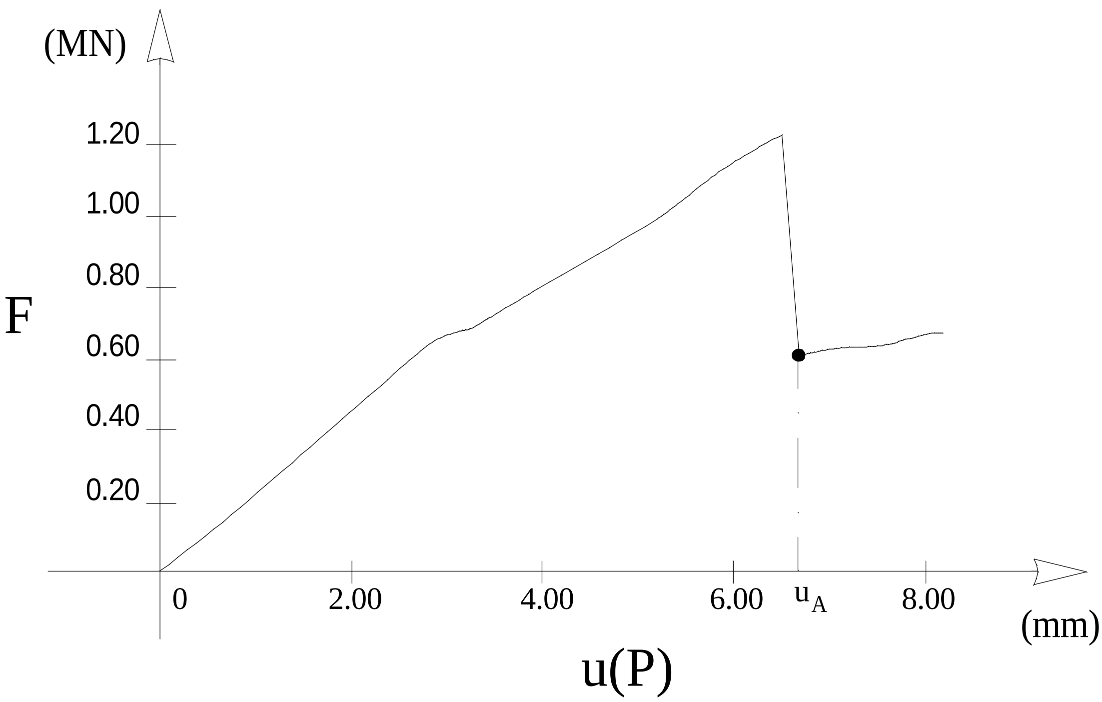

Figura 4: Forza reattiva F in funzione dello spostamento imposto u.