

CAMPI DI TENSIONE DA INTAGLI LATERALI SIMMETRICI IN PIASTRE DI LARGHEZZA FINITA

P. Lazzarin¹, R. Tovo¹, S. Filippi²

¹ Dipartimento di Ingegneria, Università di Ferrara,
Via G. Saragat 1, 44100 Ferrara

² Dipartimento di Ingegneria Meccanica, Università di Padova,
Via Venezia 1, 35131 Padova

SOMMARIO: Viene descritto un metodo approssimato per la determinazione analitica di campi di tensione in piastre di larghezza finita, sollecitate a trazione e interessate da intagli laterali simmetrici (a V, a U e semicircolari). Il metodo tiene conto della possibile mutua influenza dei due intagli e delle dimensioni finite delle piastre, estendendo il campo di validità di una precedente formulazione relativa a piastre infinite con intagli semi-infiniti. Lungo l'asse di possibile propagazione delle cricche di fatica, i valori teorici della tensione principale massima verranno confrontati con dati numerici relativi a 20 diversi modelli piani, con l'intento di evidenziare lungo l'intera sezione ristretta delle piastre l'entità degli errori associati alla nuova formulazione.

PAROLE CHIAVE: fattori di concentrazione delle tensioni, campi di tensione, intagli a V, intagli a U, intagli semicircolari

INTRODUZIONE

La conoscenza dei fattori di concentrazione e delle distribuzioni delle tensioni in corrispondenza degli intagli è essenziale per coloro che affrontano problemi di progettazione a fatica e di stima di vita residua di componenti.

E' stato recentemente presentato un contributo alla determinazione analitica dei campi di tensione indotti da intagli a V raccordati all'apice (Lazzarin e Tovo, 1996; Atzori et alii, in stampa). Lo studio prevedeva l'utilizzo di funzioni a potenziale complesso, in accordo con il metodo di Kolosoff-Muskhelishvili (Muskhelishvili, 1953), e sfruttava la rappresentazione conforme su piano semi-infinito (Neuber, 1958). E' già stato evidenziato (Lazzarin e Tovo, 1996) come dalle nuove equazioni generali si potessero facilmente riottenere come casi particolari alcune soluzioni classiche di meccanica della frattura (Westergaard, 1939; Williams, 1952; Irwin, 1957) e di "notch analysis" presenti in letteratura (Creager e Paris, 1967; Glinka, 1985; Glinka e Newport, 1987), superando la diversità dei metodi utilizzati nei lavori originali. La soluzione, a rigore ottenuta per piastra infinita con intagli semi-infiniti, si dimostrava in grado di predire con buona accuratezza la tensione principale massima lungo l'asse di possibile propagazione delle cricche di fatica anche nel caso di piastre di larghezza finita, almeno fino all'intersezione con la tensione nominale. In un diagramma doppio logaritmico era altresì visibile nella zona di massimo gradiente apparente una traslazione, lieve ma non trascurabile, fra il

campo di tensione analitico e quello ottenuto numericamente con il metodo degli elementi finiti.

La procedura descritta nel presente lavoro parte dalle espressioni delle tensioni principali già riportate dagli scriventi (Lazzarin e Tovo, 1996) e ne allarga il campo di utilizzo, tenendo conto sia delle dimensioni finite del componente che della possibile mutua influenza dei due intagli. L'obiettivo è quello di rendere massima la zona di validità delle soluzioni analitiche (dal punto di picco all'asse di simmetria della piastra) e di minimizzare l'errore nella zona centrale.

In questo specifico settore di ricerca vanno ricordati due recenti contributi (Sih et alii, 1994; Sih, 1994) nei quali sono state prese in esame le più note espressioni presenti in letteratura per descrivere la distribuzione della tensione principale massima. Da un confronto con dati numerici relativi a numerose geometrie di diverso tipo, ciascuna con intervallo di oscillazione del coefficiente teorico di concentrazione delle tensioni K_t , era emerso come fosse conveniente usare l'espressione di Glinka-Newport per $2.5 < K_t < 15$, quella di Kujawski per $K_t < 2.5$ (Glinka e Newport, 1987; Kujawski, 1991). Entrambe le espressioni derivano da quelle, già citate in precedenza, di Creager-Paris.

Ancora più recentemente, dopo aver osservato come una stessa funzione non possa predire con la stessa accuratezza la distribuzione delle tensioni per elementi di dimensioni infinite oppure finite, è stata presentata una soluzione in forma chiusa valida indipendentemente da K_t (Xu et alii, 1995). Essa lega la distribuzione delle tensione principale massima ad un fattore correttivo f_w , stimato numericamente e legato alla profondità dell'intaglio e alla larghezza della sezione ristretta della piastra. Nella soluzione sono presenti altri fattori di calibrazione, le cui espressioni erano state sempre ricavate per interpolazione di dati numerici.

Le nuove espressioni qui presentate verranno confrontate proprio con quelle di Xu, sia perché queste ultime sintetizzano precedenti contributi, superando alcuni dei limiti in essi riscontrati, sia perché l'influenza delle dimensioni finite della piastra intagliata viene esplicitamente computata.

FORMULAZIONE DEL PROBLEMA

In letteratura sono già state presentate le espressioni dei campi di tensione relative alle componenti σ_θ , σ_r e $\tau_{r\theta}$ (fig.1), imponendo le condizioni al contorno sul piano ausiliario (u,v) , all'apice dell'intaglio e lungo il suo bordo, ad una distanza infinita dall'apice. In particolare, tali espressioni risultavano per il modo I (Lazzarin e Tovo, 1996):

$$\begin{aligned}\sigma_\theta &= \lambda \cdot r^{\lambda-1} \cdot (a_1 \cdot (1+\lambda) \cdot \cos(1-\lambda)\vartheta + b_1 \cdot \cos(1+\lambda)\vartheta) + \mu \cdot r^{\mu-1} \cdot c_1 \cdot \cos(1+\mu)\vartheta \\ \sigma_r &= \lambda \cdot r^{\lambda-1} \cdot (a_1 \cdot (3-\lambda) \cdot \cos(1-\lambda)\vartheta - b_1 \cdot \cos(1+\lambda)\vartheta) - \mu \cdot r^{\mu-1} \cdot c_1 \cdot \cos(1+\mu)\vartheta \\ \tau_{r\theta} &= \lambda \cdot r^{\lambda-1} \cdot (a_1 \cdot (1-\lambda) \cdot \sin(1-\lambda)\vartheta + b_1 \cdot \sin(1+\lambda)\vartheta) + \mu \cdot r^{\mu-1} \cdot c_1 \cdot \sin(1+\mu)\vartheta\end{aligned}\quad (1)$$

Nel caso di piastra di larghezza finita è naturale pensare che nel generico punto P vi possa essere un effetto di mutua influenza dei due intagli (fig. 2). Le tensioni totali potranno comunque essere facilmente ricavate combinando gli effetti dovuti all'intaglio 1 e quelli dell'intaglio 2.

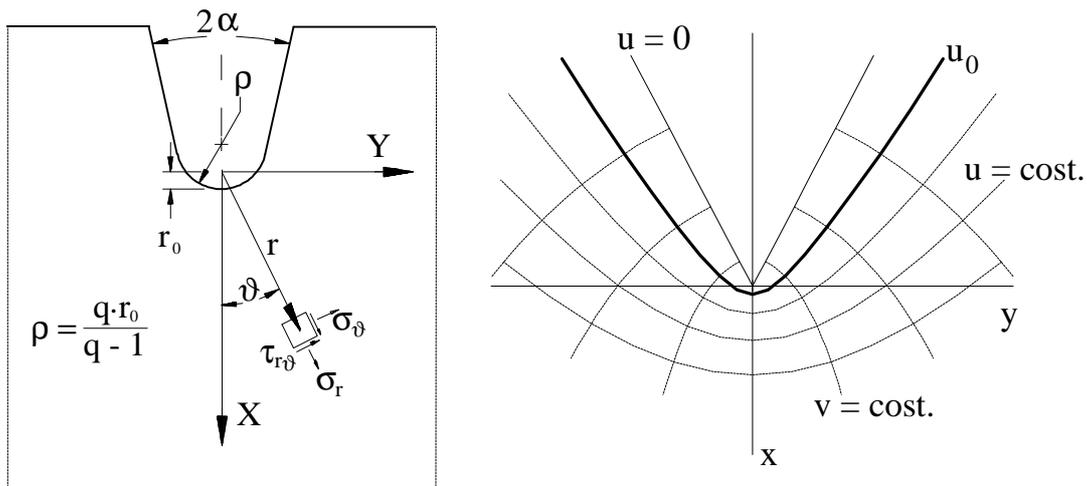


Figura 1: sistema di coordinate polari e sistema ausiliario (Lazzarin e Tovo, 1996).

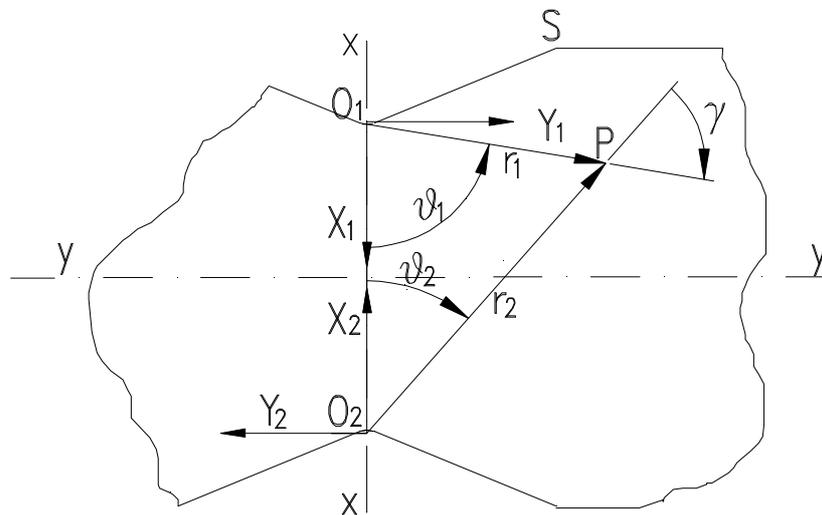


Figura 2: sistemi di riferimento dei due intagli laterali.

Se di esprimono le tensioni assumendo come il riferimento dell'intaglio 1, il secondo contributo richiede una rotazione dell'elemento dalla sua giacitura naturale individuata da θ_2 a quella individuata da θ_1 .

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix}_{\text{tot}}^1 = \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix}^1 + \begin{bmatrix} \cos^2 \gamma & \sin^2 \gamma & 2 \sin \gamma \cdot \cos \gamma \\ \sin^2 \gamma & \cos^2 \gamma & -2 \sin \gamma \cdot \cos \gamma \\ -\sin \gamma \cdot \cos \gamma & \sin \gamma \cdot \cos \gamma & \cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix}^2 \quad (2)$$

In presenza di una sollecitazione di trazione applicata alla piastra, le previsioni di resistenza a fatica e di vita residua del componente potranno essenzialmente basarsi sull'andamento delle tensione σ_θ lungo l'asse di simmetria trasversale x-x. Lungo tale asse l'espressione di σ_θ si semplifica nella forma:

$$\begin{aligned}
 (\sigma_{\theta \text{ tot}})_{\vartheta_1=\vartheta_2=0} &= \xi \cdot r_1^{\xi-1} \cdot (a_1 \cdot (1+\xi) + b_1) + \mu \cdot r_1^{\mu-1} \cdot c_1 + \\
 &+ \xi \cdot (h + 2r_o - r_1)^{\xi-1} \cdot (a_1 \cdot (1+\xi) + b_1) + \\
 &+ \mu \cdot (h + 2r_o - r_1)^{\mu-1} \cdot c_1 + \sigma_{\text{cost}}
 \end{aligned} \quad (3)$$

nella quale l'esponente ξ sostituisce l'esponente λ utilizzato nel caso di piastra infinita (laddove λ dava la singolarità dei campi di tensione nel caso di cricche aperte a V) e il termine σ_{cost} è stato aggiunto per poter descrivere l'andamento di σ_{θ} anche in zone in cui gli effetti dei due intagli non provocano più alcun gradiente.

DETERMINAZIONE DEGLI ESPONENTI E DELLE COSTANTI

Per la determinazione dell'esponente ξ e del coefficiente b_1 veniva imposto in (Lazzarin e Tovo, 1996) l'annullamento all'infinito lungo il bordo delle σ_u e τ_{uv} . Questa condizione viene ora imposta nel punto S, ossia in corrispondenza dell'intersezione tra il profilo dell'intaglio e il bordo libero della piastra (fig.2). Le espressioni di σ_u e τ_{uv} risultano essere:

$$\begin{aligned}
 (\sigma_u)_S &= \xi \cdot r_{1S}^{\xi-1} \cdot (a_1 \cdot (1+\xi) \cdot \cos(1-\xi) \vartheta_{1S} + b_1 \cdot \cos(1+\xi) \vartheta_{1S}) \cdot \cos^2 \gamma_{1S} + \\
 &+ \xi \cdot r_{1S}^{\xi-1} \cdot (a_1 \cdot (3-\xi) \cdot \cos(1-\xi) \vartheta_{1S} - b_1 \cdot \cos(1+\xi) \vartheta_{1S}) \cdot \sin^2 \gamma_{1S} + \\
 &- 2 \cdot \xi \cdot r_{1S}^{\xi-1} \cdot (a_1 \cdot (1-\xi) \cdot \sin(1-\xi) \vartheta_{1S} + b_1 \cdot \sin(1+\xi) \vartheta_{1S}) \cdot \sin \gamma_{1S} \cdot \cos \gamma_{1S} + \\
 &+ \xi \cdot r_{2S}^{\xi-1} \cdot (a_1 \cdot (1+\xi) \cdot \cos(1-\xi) \vartheta_{2S} + b_1 \cdot \cos(1+\xi) \vartheta_{2S}) \cdot \cos^2 \gamma_{2S} + \\
 &+ \xi \cdot r_{2S}^{\xi-1} \cdot (a_1 \cdot (3-\xi) \cdot \cos(1-\xi) \vartheta_{2S} - b_1 \cdot \cos(1+\xi) \vartheta_{2S}) \cdot \sin^2 \gamma_{2S} + \\
 &- 2 \cdot \xi \cdot r_{2S}^{\xi-1} \cdot (a_1 \cdot (1-\xi) \cdot \sin(1-\xi) \vartheta_{2S} + b_1 \cdot \sin(1+\xi) \vartheta_{2S}) \cdot \sin \gamma_{2S} \cdot \cos \gamma_{2S}
 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
 (\tau_{uv})_S &= \xi \cdot r_{1S}^{\xi-1} \cdot (a_1 \cdot (1+\xi) \cdot \cos(1-\xi) \vartheta_{1S} + b_1 \cdot \cos(1+\xi) \vartheta_{1S}) \cdot \cos \gamma_{1S} \cdot \sin \gamma_{1S} + \\
 &- \xi \cdot r_{1S}^{\xi-1} \cdot (a_1 \cdot (3-\xi) \cdot \cos(1-\xi) \vartheta_{1S} - b_1 \cdot \cos(1+\xi) \vartheta_{1S}) \cdot \cos \gamma_{1S} \cdot \sin \gamma_{1S} + \\
 &+ \xi \cdot r_{1S}^{\xi-1} \cdot (a_1 \cdot (1-\xi) \cdot \sin(1-\xi) \vartheta_{1S} + b_1 \cdot \sin(1+\xi) \vartheta_{1S}) \cdot (\cos^2 \gamma_{1S} - \sin^2 \gamma_{1S}) + \\
 &+ \xi \cdot r_{2S}^{\xi-1} \cdot (a_1 \cdot (1+\xi) \cdot \cos(1-\xi) \vartheta_{2S} + b_1 \cdot \cos(1+\xi) \vartheta_{2S}) \cdot \cos \gamma_{2S} \cdot \sin \gamma_{2S} + \\
 &- \xi \cdot r_{2S}^{\xi-1} \cdot (a_1 \cdot (3-\xi) \cdot \cos(1-\xi) \vartheta_{2S} - b_1 \cdot \cos(1+\xi) \vartheta_{2S}) \cdot \cos \gamma_{2S} \cdot \sin \gamma_{2S} + \\
 &+ \xi \cdot r_{2S}^{\xi-1} \cdot (a_1 \cdot (1-\xi) \cdot \sin(1-\xi) \vartheta_{2S} + b_1 \cdot \sin(1+\xi) \vartheta_{2S}) \cdot (\cos^2 \gamma_{2S} - \sin^2 \gamma_{2S})
 \end{aligned} \quad (5)$$

Le eqn. (4-5) danno un sistema omogeneo in a_1 e b_1 . Affinché la soluzione non sia banale, il determinante dovrà essere uguale a zero. Formalmente il sistema appena scritto si può porre nella forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_u \\ \tau_{uv} \end{Bmatrix}_S = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

avendo indicato con δ_{11} e δ_{21} le espressioni che moltiplicano il coefficiente a_1 e con δ_{22} e δ_{12} quelle che moltiplicano b_1 . La condizione di determinante nullo diviene:

$$\delta_{11} \cdot \delta_{22} - \delta_{12} \cdot \delta_{21} = 0 \quad (7)$$

e consente la determinazione numerica dell'esponente ξ . Dalle (6) si ricava $b_1 = -a_1 \delta_{11} / \delta_{12} = -a_1 \delta_{21} / \delta_{22}$.

La costante c_1 e l'esponente μ possono essere ricavati imponendo le stesse condizioni previste in (Lazzarin e Tovo, 1996) all'apice dell'intaglio:

$$(\sigma_u)_{\substack{u=u_0 \\ v=0}} = (\sigma_r)_{\substack{r=r_0 \\ \vartheta=0}} = 0 \quad (8)$$

$$\left(\frac{\partial \tau_{uv}}{\partial v} \right)_{\substack{u=u_0 \\ v=0}} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial \tau_{r\vartheta}}{\partial \vartheta} \right)_{\substack{r=r_0 \\ \vartheta=0}} - \frac{1}{q} (\sigma_\vartheta)_{\substack{r=r_0 \\ \vartheta=0}} = 0 \quad (9)$$

In forma esplicita si ottengono le due espressioni seguenti:

$$\xi \cdot r_o^{\xi-1} \cdot \left((1+\xi) + \frac{b_1}{a_1} \right) + \mu \cdot r_o^{\mu-1} \cdot \frac{c_1}{a_1} + \left(\xi \cdot (r_o + h)^{\xi-1} \cdot \left((1+\xi) + \frac{b_1}{a_1} \right) + \mu \cdot (r_o + h)^{\mu-1} \cdot \frac{c_1}{a_1} \right) = 0 \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & \xi \cdot r_o^{\xi-1} \cdot \left((1-\xi) \cdot (1-\xi) + \frac{b_1}{a_1} \cdot (1+\xi) \right) + \mu \cdot r_o^{\mu-1} \cdot \frac{c_1}{a_1} (1+\mu) + \\ & + \left(\xi \cdot (r_o + h)^{\xi-1} \cdot \left((1-\xi) \cdot (1-\xi) + \frac{b_1}{a_1} (1+\xi) \right) + \mu \cdot (r_o + h)^{\mu-1} \cdot \frac{c_1}{a_1} \cdot (1+\mu) \right) + \\ & - \frac{1}{q} \cdot \left(\xi \cdot r_o^{\xi-1} \cdot \left((1+\xi) \cdot (1-\xi) + \frac{b_1}{a_1} \cdot (1+\xi) \right) + \mu \cdot r_o^{\mu-1} \cdot \frac{c_1}{a_1} (1+\mu) \right) + \\ & - \frac{1}{q} \cdot \left(\xi \cdot (r_o + h)^{\xi-1} \cdot \left((1+\xi) \cdot (1-\xi) + \frac{b_1}{a_1} \cdot (1+\xi) \right) + \mu \cdot (r_o + h)^{\mu-1} \cdot \frac{c_1}{a_1} (1+\mu) \right) = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Infine, utilizzando il valore della tensione massima σ_θ all'apice ed imponendo una condizione di equilibrio nella sezione ristretta nella forma:

$$\sigma_{\text{nom,net}} = \frac{2}{h} \cdot \int_{r_o}^{r_o + \frac{h}{2}} (\sigma_\vartheta)_{\vartheta=0} dr + \sigma_{\text{cost}} \quad (12)$$

si ricavano i valori delle costanti a_1 e σ_{cost} . Va osservato come l'integrale possa essere risolto analiticamente e come il valore della costante σ_{cost} non coincida con la tensione nominale nella "gross area", talora introdotta in letteratura (Shin et alii, 1994) come termine addizionale, utile ad estendere la validità delle espressioni dei campi di tensione dalla zona di massimo gradiente a quella della tensione nominale.

Tabella 1: parametri geometrici dei modelli utilizzati
e coefficienti di concentrazione delle tensioni $K_{t,net}$

Modello	intagli	2α (°)	ρ (mm)	h (mm)	$K_{t,net}$	DOF
1	V	135	0,5	80	6.157	7756
2	V	135	0,5	40	5.044	7532
3	V	135	0,5	20	4.047	7252
4	V	135	2,5	80	3.663	8278
5	V	135	2,5	40	3.001	7956
6	V	135	2,5	20	2.415	7148
7	V	90	0,5	40	7.071	6050
8	V	90	1,25	40	4.723	6194
9	V	90	2,5	40	3.514	6910
10	V	45	0,5	40	7.395	12334
11	V	45	1,25	40	4.834	10552
12	V	45	2,5	40	3.554	9664
13	U	0	0,5	80	9.052	13240
14	U	0	0,5	40	7.412	12578
15	U	0	1,25	40	4.839	10360
16	U	0	2,5	40	3.556	9226
17	U	0	2,5	20	2.789	8672
18	semi-circ.		5	20	2.042	6248
19	semi-circ.		5	40	2.429	6620
20	semi-circ.		5	80	2.726	6962

CONFRONTO TRA RISULTATI ANALITICI E NUMERICI

Per valutare il grado di affidabilità delle relazioni analitiche appena riportate sono state effettuate delle analisi numeriche che hanno preso in esame piastre piane interessate da intagli a V, a U e semicircolari. Sono stati assunti come parametri l'angolo di apertura 2α , il raggio di raccordo ρ e la larghezza h della sezione ristretta. I valori dei parametri per i 20 casi esaminati è riportato in Tabella I, dove compaiono anche i coefficienti teorici di concentrazione delle tensioni e il numero di gradi di libertà di ciascun modello. Si fa notare come il rapporto h/ρ vari tra 8 e 160 nel caso degli intagli a V e a U e fra 4 e 16 per quelli semicircolari, a testimonianza di uno spettro di casi piuttosto ampio. Tutte le geometrie sono caratterizzate da un doppio intaglio simmetrico. Per le analisi numeriche, basate sul metodo degli elementi finiti, è stato utilizzato il codice di calcolo ANSYS® 5.2, implementato su workstation sia presso il DI dell'Università di Ferrara che presso il DIM dell'Università di Padova.

L'andamento delle σ_θ lungo l'asse di simmetria trasversale è diagrammato nelle figure 3 e 4 per due casi relativi ad un piastra con intagli simmetrici a V e a U. A parità di profondità degli intagli (10 mm), variano nei due casi i raggi di raccordo (ρ) e la larghezza (h) della sezione ristretta. I valori della tensione principale sono diagrammati lungo l'asse di simmetria delle due piastre, in funzione della distanza dall'apice divisa per il raggio di raccordo dell'intaglio. E' evidente il buon accordo tra risultati teorici e numerici, non solo nella zona di massimo gradiente, ma lungo l'intera sezione ristretta della piastra. Nel confronto sono coinvolte anche le distribuzioni previste dalle

espressioni di Xu. Le differenze percentuali fra i risultati FEM e quelli teorici sono riportate nelle figure 5 e 6 per gli intagli a V, nella figura 7 per quelli a U.

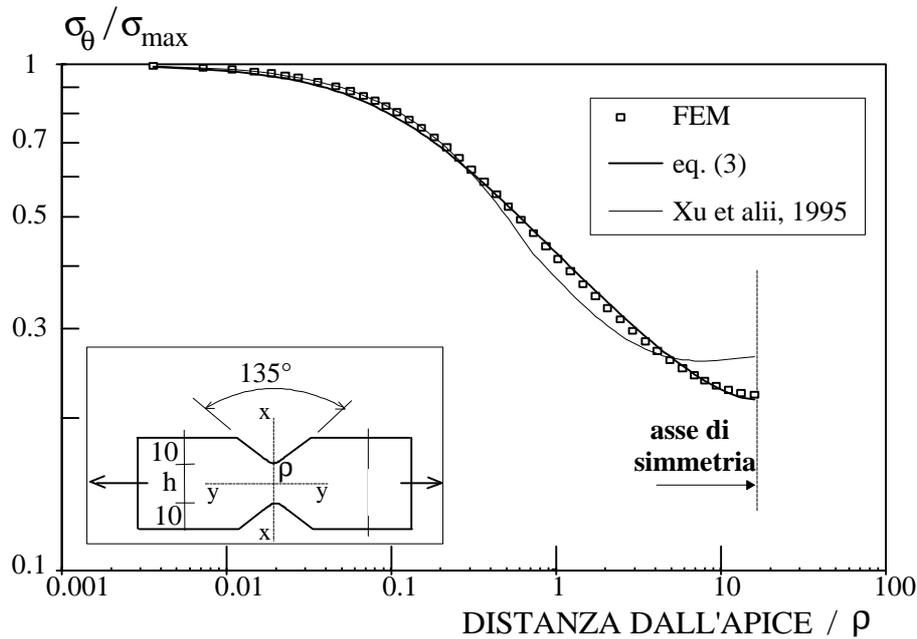


Figura 3: tensione S_q lungo l'asse $x-x$ ($r = 2.5 \text{ mm}$, $h = 100 \text{ mm}$).

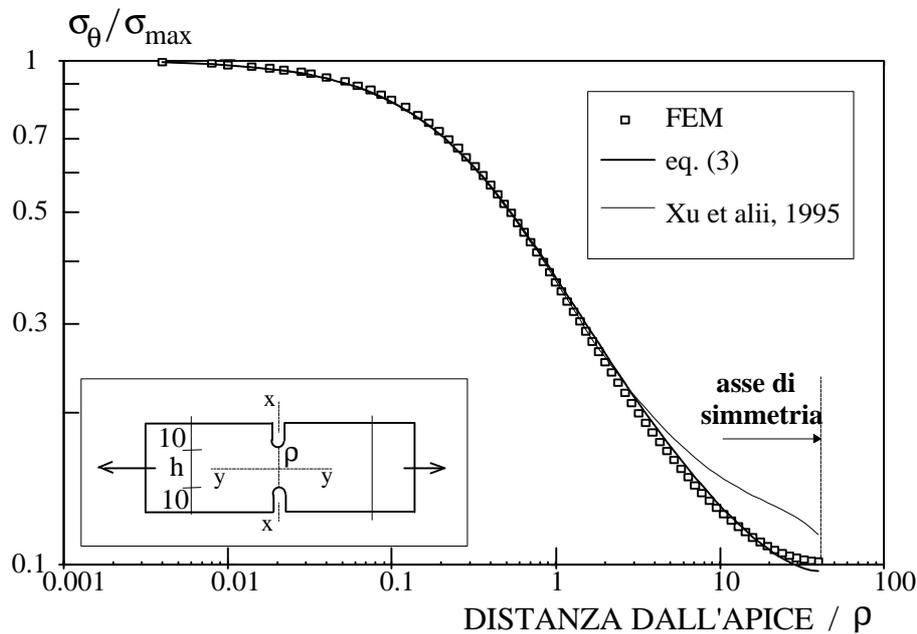


Figura 4: tensione S_q lungo l'asse $x-x$ ($r = 0.5 \text{ mm}$, $h = 60 \text{ mm}$).

Nel caso degli intagli semicircolari, per i quali perdeva di significato una definizione di angolo di apertura, si è voluto comunque saggiare l'affidabilità delle nuove relazioni spostando la posizione del punto S lungo il bordo dell'intaglio; in particolare tale punto è stato fissato all'altezza dell'origine del sistema di riferimento, ossia ad una distanza

dall'apice pari a $\rho/2$ in direzione x. Gli errori associati ai 3 modelli analizzati sono rappresentati in figura 8.

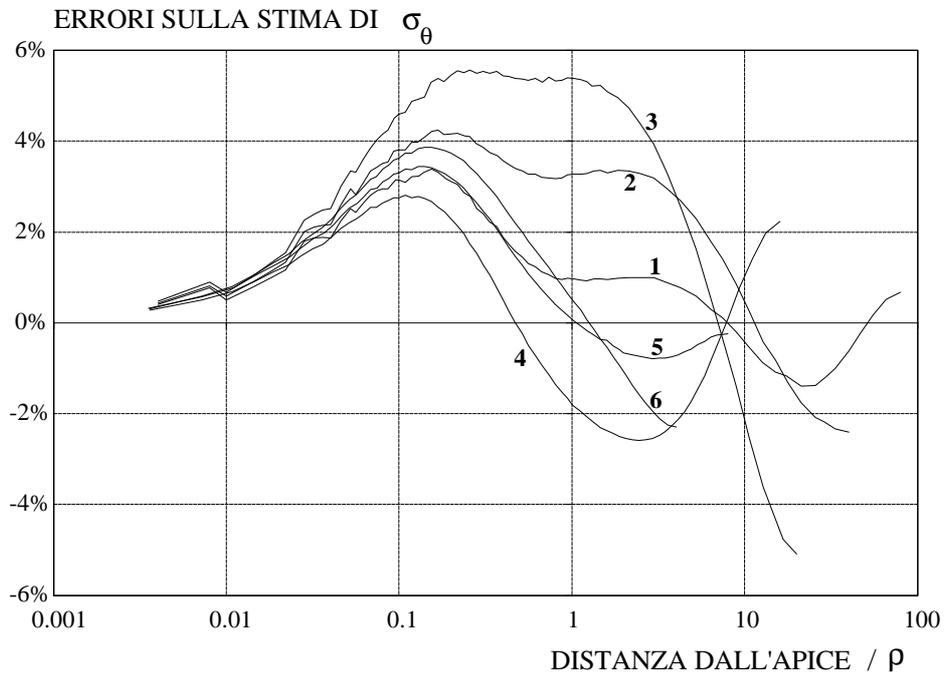


Figura 5: errori percentuali lungo l'asse per i modelli con angolo di apertura 135° .

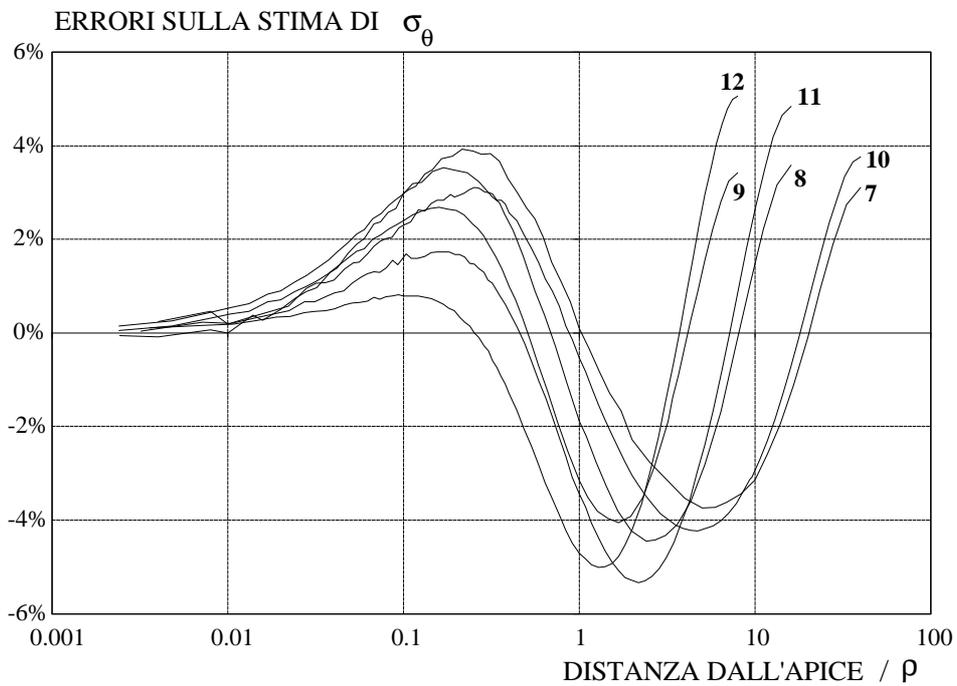


Figura 6: errori percentuali lungo l'asse per i modelli con angolo di apertura 45° e 90° .

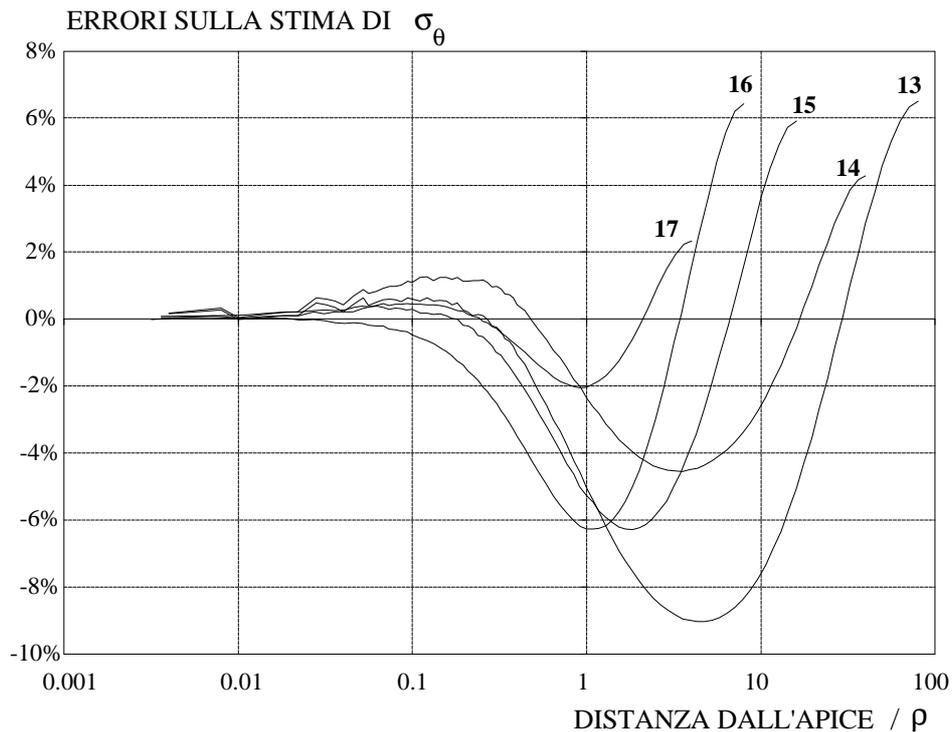


Figura 7: errori percentuali lungo l'asse per i modelli con intagli a U.

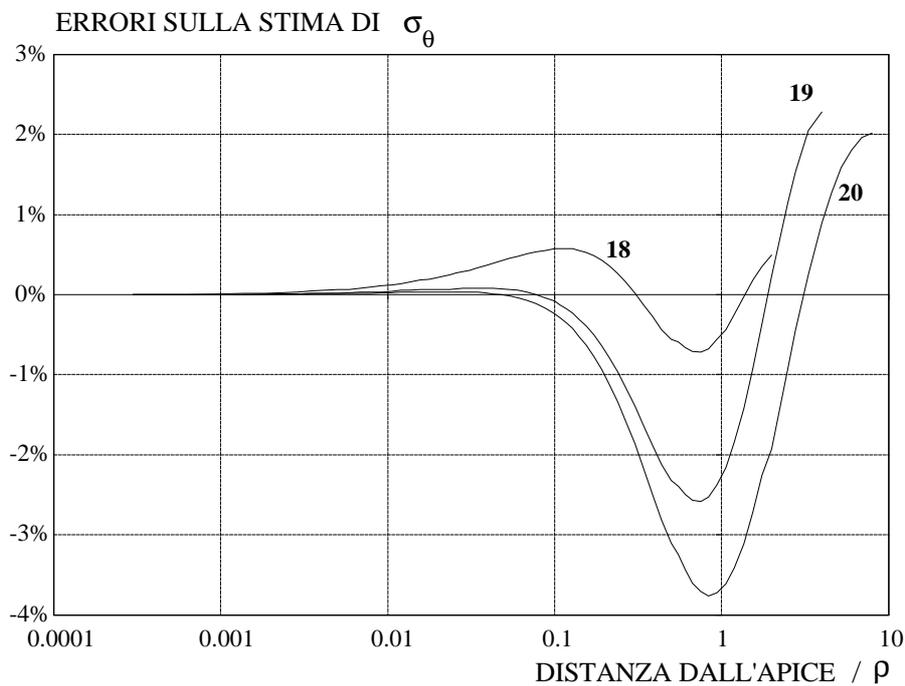


Figura 8: errori percentuali lungo l'asse per i modelli con intaglio semicircolare.

Nonostante i risultati delle nuove relazioni appaiano nel loro insieme più che soddisfacenti, va detto che l'entità degli errori si riduce ulteriormente ottimizzando la posizione del punto S, con un metodo, di agevole implementazione, che sarà oggetto di un prossimo contributo.

CONCLUSIONI

E' stata presentata una procedura per determinare la distribuzione delle tensioni in piastre interessate da intagli laterali simmetrici a V, a U e semicircolari. Un confronto esteso all'intera sezione ristretta con più serie di dati forniti da modelli agli elementi finiti ha evidenziato l'entità degli errori che la nuova formulazione comporta:

- con gli intagli aventi angolo di apertura $2\alpha=135^\circ$ è stato riscontrato un errore massimo del 5%. Gli intagli avevano tutti una profondità pari a 10 mm, mentre variava fra 8 e 160 il rapporto p/h (raggio di raccordo su larghezza della sezione ristretta);
- con gli intagli eventanti $2\alpha=45^\circ$ e 90° , gli errori rimanevano inferiori al 5%, a parità di profondità dell'intaglio e con p/h variabile tra 16 e 80;
- con gli intagli a U gli errori variavano sensibilmente da modello a modello, passando dal 2% ($p/d=8$) al 9% ($p/h=160$);
- con gli intagli semicircolari di raggio 5 mm e p/h variabile fra 4 e 16 l'errore massimo in assoluto è risultato inferiore al 4%.

E' stato osservato come l'entità degli errori potrebbe ulteriormente ridursi ottimizzando la posizione del punto S.

BIBLIOGRAFIA

Atzori, B., Lazzarin, P. e Tovo, R., accettato per la pubblicazione, "Stress distributions for V-shaped notches under tensile and bending loading".

Creager, M. and Paris P. C., 1967, "Elastic Field Equations for Blunt Cracks with Reference to Stress Corrosion Cracking", *Int. J. Fract.*, **3**, 247-252

Glinka G., 1985, "Calculation of inelastic notch-tip strain-stress histories under cyclic loading", *Engng Fract. Mech.*, **22**, 839-854

Glinka, G. and Newport, A., 1987, "Universal Features of Elastic Notch-Tip Stress Fields", *Int. J. Fatigue*, **9**, no. 3, 143-150

Irwin, G. R., 1957, "Analysis Of Stresses And Strain Near The End Of A Crack Transversing A Plate", *J. appl. Mech.*, **24**, 361-364

Lazzarin, P., Tovo, R., 1996, "A Unified Approach To The Evaluation Of Linear Elastic Fields In The Neighbourhood Of Cracks And Notches", *Int. J. Fract.*, **78**, 3-19

Muskhelishvili, N. I., 1953, "*Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*", Noordhoof Leyden

Neuber, H., 1958, "*Theory of notch stresses*", Springer-Verlag, Berlin

Shin, C.S., Man, K.C. and Wang, C.M., 1994, "A Practical Method To Estimate The Stress Concentration Of Notches", *Int. J. Fatigue*, **16**, 242-255

Shin, C.S., 1994, "Fatigue Crack Growth From Stress Concentrations And Fatigue Life Predictions In Notched Components" *Handbook of Fatigue Crack Propagation in Metallic Structures*, Ed. A. Carpinteri, 613-652, Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam

Westergaard, H.M., 1939, "Bearing pressure and cracks", *J. appl. Mech.*, **6**, A49-53

Williams, M. L., 1952, "Stress Singularities Resulting From Various Boundary Conditions In Angular Corners Of Plates In Tension", *J. appl. Mech.*, **19**, 526-528

Xu, R.X., Thompson, J.C. and Topper, T.H., 1995, "Practical Stress Expressions For Stress Concentration Regions", *Fatigue Fract. Engng Mater. Struct.*, **18**, 885-895.