

SULLA MODELLAZIONE DELL'ELEMENTO FINITO FESSURATO DI UNA TRAVE

L. Cornia, L. Federici, E. Viola

*D.I.S.T.A.R.T. Istituto di Scienza delle Costruzioni-Facoltà di Ingegneria
Università di Bologna-Viale Risorgimento 2 - 40136 Bologna (BO)*

SOMMARIO: In questo lavoro si studia il comportamento dinamico della trave fessurata, sottolineando anche l'influenza delle condizioni al contorno sulle frequenze e sulle forme modali. La trave fessurata è modellata sia analiticamente, che numericamente ad elementi finiti. Nella modellazione analitica la presenza del crack viene simulata da una cerniera elastica di opportuna rigidità torsionale, dipendente dalla geometria della fessura e dalla sezione trasversale della trave. Per quanto concerne la modellazione numerica ad elementi finiti, viene ricavata la matrice di rigidità dell'elemento fessurato mediante il teorema di Castigliano. L'energia connessa con la presenza di un crack risulta espressa in funzione degli stress intensity factors. In base al principio di De Saint Venant, il campo di tensione risulta modificato solo nella regione adiacente alla fessura. Pertanto, tranne che per l'elemento contenente il crack, gli elementi della matrice di rigidità si possono considerare uguali a quelli della trave integra.

PAROLE CHIAVE: Dinamica, Trave, Frattura, Crack, Elementi finiti

MODELLAZIONE ANALITICA DELLA TRAVE FESSURATA DI EULERO-BERNOULLI

Nell'analisi delle strutture, una trave con un crack può essere intesa come un continuo monodimensionale con una riduzione di rigidità locale nella sezione danneggiata. Nella sezione in cui è ubicato, si assume che il crack produca una discontinuità nella derivata prima della linea elastica della trave.

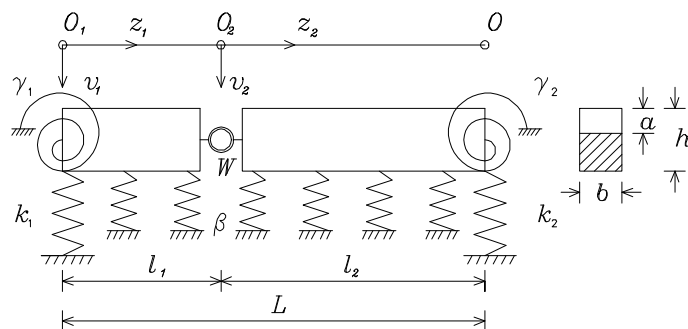


Figura 1 : Modellazione della trave fessurata su suolo elastico

Per analizzare il problema nel modo più semplice possibile, qui di seguito si applicano le usuali assunzioni della teoria della trave; in particolare si considera, come in Fig. 1, una trave di lunghezza L , con un singolo difetto di dimensione a , con sezione trasversale rettangolare $b \times h$, vincolata alle estremità da molle rotazionali e traslazionali e situata su

di un suolo elastico alla Winkler, di parametro di sottofondo b [FL^{-2}]. Per una trave snella con $L/h \gg 1$, si può trascurare la deformazione tagliante. La trave non risulta soggetta a sforzo assiale e la sezione trasversale danneggiata può essere simulata da una molla rotazionale. In altre parole, si può dire che l'incremento di deformazione angolare causato dall'esistenza del difetto è dovuto solo al momento flettente e il crack può essere considerato sollecitato solo nel Modo I (*opening mode*).

Dalla relazione di Irwin fra l'*energy release rate*, gli *stress intensity factors* e il cambiamento di flessibilità nei confronti della lunghezza del crack, si può derivare la flessibilità addizionale dovuta al difetto. La rigidità della cerniera elastica simulante la sezione danneggiata può essere espressa da (Viola e Pascale, 1985):

$$W = Eh^3 h / 6f(\xi) \quad (1)$$

dove $h = b/h$, E è il modulo di Young del materiale e $f(\xi)$ è una funzione adimensionale del rapporto $a/h = \xi$ (profondità relativa del crack). Un'espressione per la $f(\xi)$ che sembra essere accurata per il campo di interesse esaminato, è stata ottenuta utilizzando il metodo degli elementi finiti:

$$f(\xi) = \xi^2 [12 - 19.5\xi + 70.1\xi^2 - 97.6\xi^3 + 142\xi^4 - 138\xi^5 + 128\xi^6 - 132\xi^7 + 379\xi^8 - 417\xi^9 + 131\xi^{10} + 313\xi^{12} - 357\xi^{13} + 102\xi^{14}] \text{ per } 0 \leq \xi \leq 0.5 \quad (2)$$

e

$$f(\xi) = (1.32/(1-\xi)^2) - 1.78 \text{ per } 0.5 < \xi < 1 \quad (3)$$

Per ricavare le equazioni del moto viene fatto riferimento alla Fig. 1; qui g e k_j ($j=1,2$) rappresentano le rigidità rotazionali e traslazionali delle molle alle estremità della trave, W è la rigidità della cerniera elastica simulante la sezione con il crack.

Il difetto è localizzato alle distanze l_1 e l_2 dalle estremità sinistra e destra della trave, rispettivamente, e L è la lunghezza complessiva. Sia $O_j v_j z_j$ il sistema di coordinate cartesiane centrato rispettivamente sull'estremità sinistra della trave e sulla cerniera elastica, con l'asse z_j lungo la trave. I valori dell'indice $j=1,2$ si riferiscono alle parti della trave situate alla sinistra e alla destra della cerniera elastica. Nel rispetto del suddetto sistema di coordinate, la soluzione generale delle equazioni differenziali per le due porzioni di trave aventi rigidità flessionale costante, assumendo $v(z,t) = V(z)g(t)$, è data da

$$V_j = A_j \sin k z_j + B_j \cos k z_j + C_j \sinh k z_j + D_j \cosh k z_j \quad (4)$$

dove

$$k = \sqrt[4]{\frac{W^2 m \Delta - b}{EJ}} \quad (5)$$

Nelle (4) e (5) W esprime la pulsazione naturale, m la densità e J il momento d'inerzia della sezione trasversale. Le curve di spostamento elastico V_j ($j=1,2$) sono valide per $l_j \neq z_j \neq 0$; le equazioni differenziali devono essere risolte lungo ogni porzione di trave in cui lo spostamento e le sue derivate sono funzioni continue. Le costanti di integrazione A_j , B_j , C_j , D_j ($j=1,2$) dipendono da come ogni porzione di trave $O_1 O_2$ e $O_2 O$ è vincolata ai suoi estremi. Per derivare le costanti bisogna imporre le condizioni al contorno alle estremità della trave e nel punto in cui è localizzata la cerniera elastica.

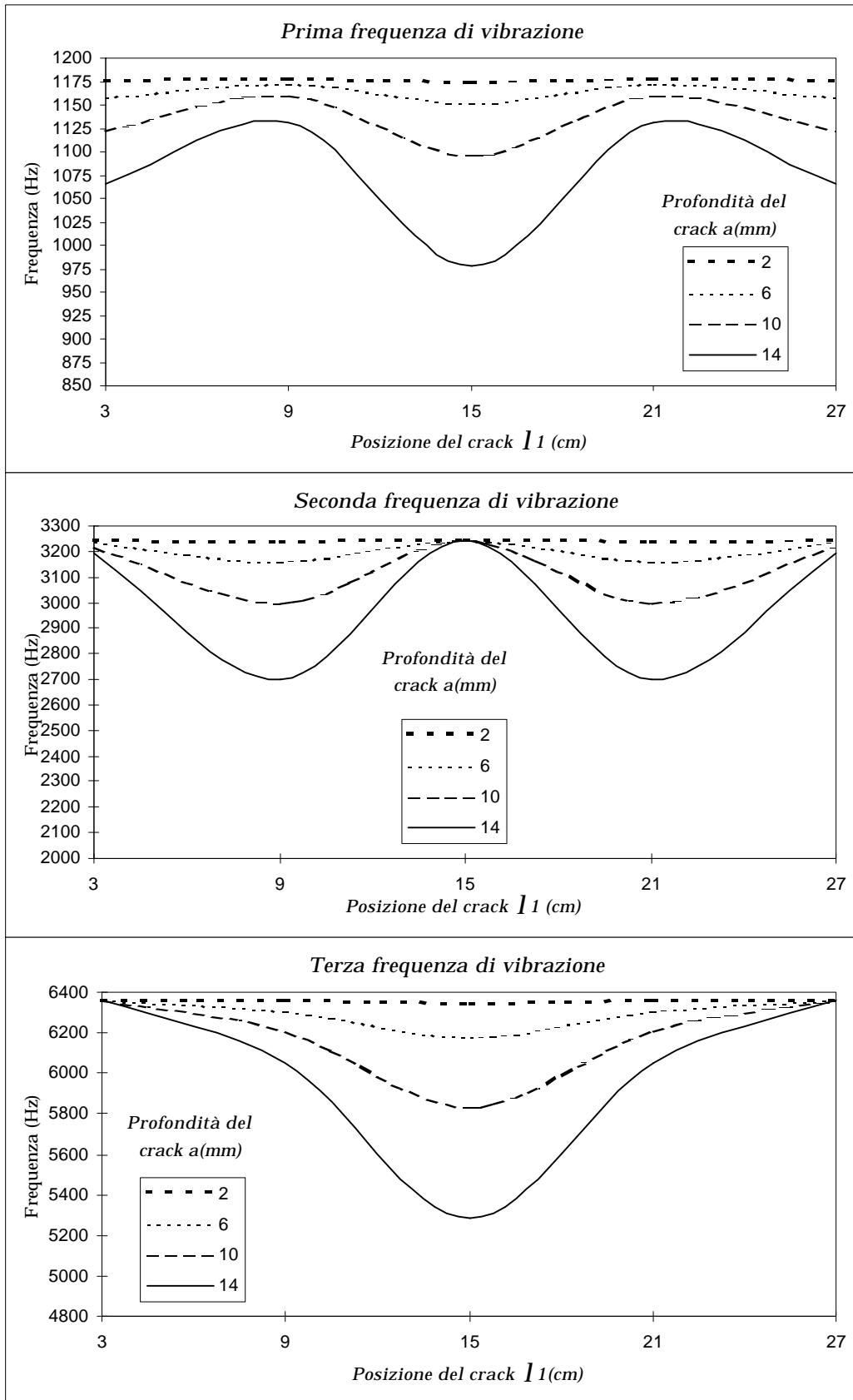


Figura 2 : Andamento delle frequenze in funzione della posizione del crack, al variare della sua profondità

Tali condizioni al contorno si derivano in maniera rigorosa mediante il calcolo delle variazioni e sono espresse dalle seguenti :

$$\begin{aligned}
 EJV_1'''|_{z_1=0} + k_1V_1|_{z_1=0} &= 0, & V_1|_{z_1=l_1} - V_2|_{z_2=0} &= 0 \\
 EJV_1''|_{z_1=0} - g_1V_1'|_{z_1=0} &= 0, & [V_2|_{z_2=0} - V_1|_{z_1=l_1}]W - EV_2''|_{z_2=0} &= 0 \\
 EJV_2'''|_{z_2=l_2} - k_2V_2|_{z_2=l_2} &= 0, & V_1''|_{z_1=l_1} - V_2''|_{z_2=0} &= 0 \\
 EJV_2''|_{z_2=l_2} + g_2V_2|_{z_2=l_2} &= 0, & V_1'''|_{z_1=l_1} - V_2'''|_{z_2=0} &= 0
 \end{aligned} \tag{6}$$

La sostituzione della (4) e delle sue derivate nelle (6) conduce alla determinazione di un sistema omogeneo di otto equazioni in otto incognite che si può scrivere nella forma

$$\mathbf{H}\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{7}$$

dove \mathbf{x} è il vettore delle incognite

$$\mathbf{x} = [A_1 \ B_1 \ C_1 \ D_1 \ A_2 \ B_2 \ C_2 \ D_2]^T \tag{8}$$

Affinché il sistema (7) abbia soluzioni diverse da quella banale, è necessario imporre che il determinante della matrice \mathbf{H} sia uguale a zero ; ne risulta un'equazione trascendente dalla cui risoluzione si ottengono i valori di k che consentono di ricavare i valori delle pulsazioni della trave danneggiata. Inoltre, sostituendo uno ad uno i valori di k trovati nel sistema (7), si ottengono, a meno di una costante, i valori di A_j, B_j, C_j, D_j ($j=1,2$)che, sostituiti nella (4), danno le forme modali della trave con il crack. La procedura qui sopra descritta è stata applicata per ricavare frequenze e modi di vibrare di una trave fessurata lunga 30 cm, di sezione trasversale $2 \times 2 \text{ cm}^2$, con modulo di elasticità $E=2.06 \times 10^5 \text{ MPa}$, modulo di Poisson $\nu=0.3$ e densità $\mu=7750 \text{ kg/m}^3$.

In Fig. 2 si riporta, nel caso di trave incastrata, l'andamento delle prime tre frequenze naturali in funzione della posizione del crack, al variare della sua profondità. Inoltre, si è considerato il caso in cui il difetto è fissato sia come posizione che come profondità ed è stato valutato l'effetto che ha, su frequenze e modi di vibrare, il progressivo irrigidimento delle condizioni al contorno. In Fig. 3 è rappresentato il caso in cui varia la rigidità traslazionale dei vincoli d'estremità.

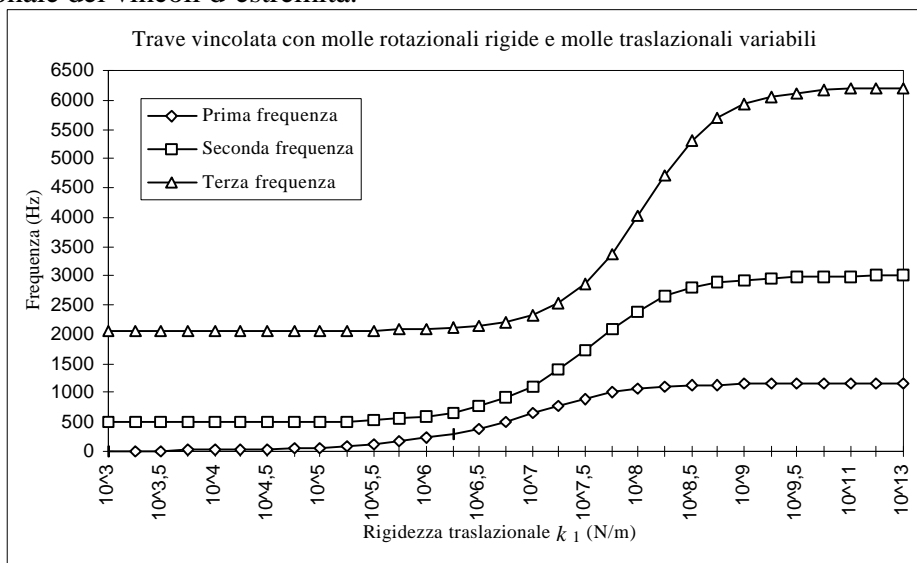


Figura 3 : Influenza della rigidità traslazionale dei vincoli d'estremità sulle prime tre frequenze naturali della trave fessurata

La Fig. 4, invece, illustra l'influenza degli incastrati angolarmente cedevoli sulle prime tre frequenze naturali. Le curve di Figg. 3,4 si riferiscono alla posizione e profondità del crack specificate da $l_1=9\text{cm}$ e $a=10\text{ mm}$.

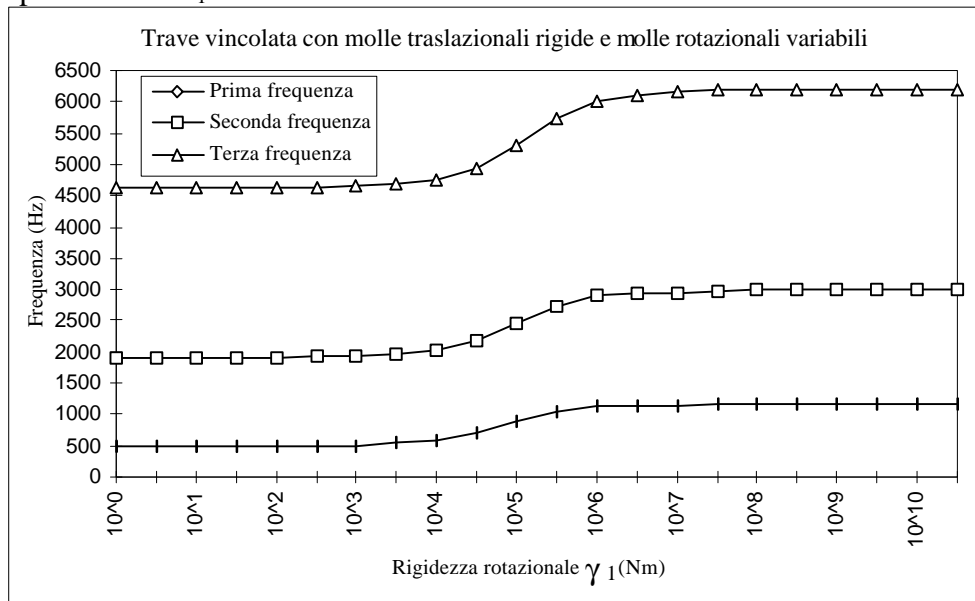


Figura 4 : Influenza della rigidezza rotazionale dei vincoli d'estremità sulle prime tre frequenze naturali della trave fessurata

EQUAZIONI DEL MOTO E ANALISI MODALE

Le equazioni del moto di un sistema discreto o discretizzato, in notazione matriciale, possono essere espresse nella forma :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f} \quad (9)$$

dove le quantità \mathbf{M}, \mathbf{C} e \mathbf{K} , che caratterizzano il comportamento del sistema indicano, rispettivamente, le matrici di massa, di smorzamento e di rigidezza. Dette matrici sono reali, simmetriche e definite positive; $\ddot{\mathbf{q}} = \ddot{\mathbf{q}}(t), \dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}(t)$ e $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$ sono, rispettivamente, i vettori delle accelerazioni, delle velocità e degli spostamenti delle masse del sistema. Infine, è indicato con $\mathbf{f} = \mathbf{f}(t)$ il vettore delle forze generalizzate applicate al sistema. Nel caso di moto non smorzato e di oscillazioni libere, la (9) si riduce a

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (10)$$

Le equazioni differenziali del moto sono, generalmente, accoppiate per la presenza di prodotti incrociati nelle espressioni dell'energia cinetica e di quella potenziale. Per disaccoppiare le suddette equazioni, si ricorre ad una trasformazione lineare delle coordinate:

$$\mathbf{q} = \mathbf{y} e^{i\omega t} \quad (11)$$

Dalla sostituzione della (11) in (10) si ottiene il problema agli autovalori

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (12)$$

associato alle equazioni delle oscillazioni libere non smorzate.

Sviluppando il determinante della matrice $(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})$, si ottiene un'equazione algebrica di ordine n in ω^2 . Tale equazione è detta equazione caratteristica del problema agli autovalori. Le n radici dell'equazione caratteristica ω_k^2 ($k = 1, 2, \dots, n$) sono gli autovalori

del sistema. Poiché le matrici \mathbf{M} e \mathbf{K} sono simmetriche e definite positive, gli autovalori sono reali e positivi. Le radici quadrate degli autovalori vengono dette frequenze naturali e possono essere ordinate in modo che

$$\omega_1 \leq \omega_2 \leq \omega_3 \leq \dots \leq \omega_n \quad (13)$$

Ad ogni autovalore ω_k^2 resta associato un autovettore $\psi^{(k)}$. Per il teorema di espansione, si assume che la risposta del sistema rappresentato dalla (10) sia data dalla sovrapposizione di modi normali della forma

$$\mathbf{q} = \Psi \mathbf{h} \quad (14)$$

dove

$$\Psi = [\psi^{(1)} \psi^{(2)} \dots \psi^{(n)}] \quad (15)$$

è una matrice quadrata di ordine n , detta matrice modale, costituita da n vettori modali, ed \mathbf{h} è un vettore di coordinate normali o generalizzate

$$\mathbf{h} = [h_1 h_2 \dots h_n]^T \quad (16)$$

MATRICE DI RIGIDEZZA DI UN ELEMENTO CON IL CRACK

Il modello di trave più semplice che prende in conto la deformabilità tagliante è detto modello di trave di Timoshenko. In questo modello l'ipotesi cinematica alla base della teoria di Eulero-Bernoulli viene sostituita dalla seguente :

sezioni trasversali perpendicolari all'asse geometrico della trave indeformata rimangono piane, ma non necessariamente perpendicolari all'asse della trave dopo la deformazione.

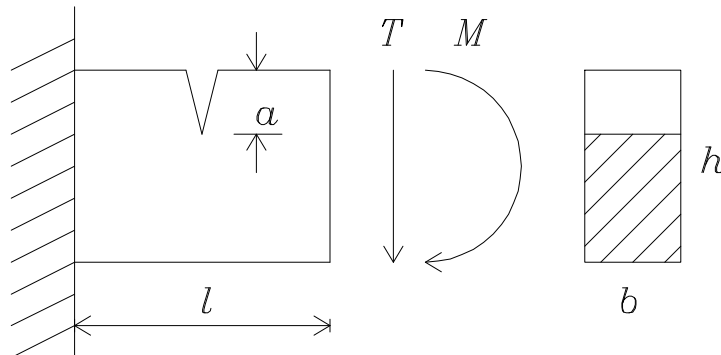


Figura 5: Modello di elemento fessurato

In altre parole, nella teoria di Timoshenko l'angolo di rotazione della sezione è tenuto distinto dalla rotazione dell'asse geometrico della trave. La differenza fra le due differenti rotazioni è una misura dello scorrimento medio in corrispondenza della generica sezione. Una trave danneggiata può essere suddivisa in elementi finiti e il comportamento degli elementi situati alla destra di quello con il crack lo si considera espresso da forze esterne applicate; a sinistra, invece, l'elemento con il crack (Fig. 5) lo si suppone vincolato mediante un incastro.

L'energia di deformazione dell'elemento integro si può scrivere come :

$$\Phi(0) = \frac{1}{2EJ} \left(M^2 l + MTl^2 + \frac{T^2 l^3}{3} \right) + \frac{\chi T^2 l}{2GA} \quad (17)$$

dove G è il modulo di elasticità tangenziale e χ è il fattore di taglio, che viene introdotto allo scopo di tenere in conto il fatto che le tensioni tangenziali non sono in realtà costanti

sulla sezione. Il contributo addizionale di energia dovuto alla presenza del crack è fornito da (Tada *et alii*, 1973):

$$W_c = b \int_0^a \left\{ [(K_{IM} + K_{IT})^2 + K_{IIT}^2] / E' \right\} da \quad (18)$$

Nella (18) K_{IM} , K_{IT} e K_{IIT} denotano gli stress intensity factors. Derivando due volte la (17) rispetto a forze (T) e momenti (M) si deduce, in virtù del teorema di Castigliano, la matrice di flessibilità dell'elemento di trave integro :

$$c^{(0)} = \begin{bmatrix} \frac{l^3}{3EJ} + \frac{l}{kGA} & \frac{l^2}{2EJ} \\ \frac{l^2}{2EJ} & \frac{l}{EJ} \end{bmatrix} \quad (19)$$

Analogamente, per quanto riguarda il contributo dovuto alla presenza del crack, derivando due volte la (18) si ottiene la matrice di flessibilità addizionale :

$$c^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{nR_I l^2}{2} + 2mR_{II} & nR_I \\ nR_I & 2nR_I \end{bmatrix} \quad (20)$$

dove

$$\begin{aligned} n &= \frac{36p}{E'bh^4} & R_I &= \int_0^a aF_I^2(s)da \\ m &= \frac{p}{h^2E'b} & R_{II} &= \int_0^a aF_{II}^2(s)da \end{aligned} \quad (21)$$

e F_I ed F_{II} sono funzioni che compaiono nelle espressioni degli stress intensity factors. Sommando la (19) con la (20), si ottiene la matrice di flessibilità totale :

$$c = \begin{bmatrix} \frac{nR_I l^2}{2} + 2mR_{II} + \frac{l^3}{3EJ} + \frac{l}{kGA} & nR_I + \frac{l^2}{2EJ} \\ nR_I + \frac{l^2}{2EJ} & 2nR_I + \frac{l}{EJ} \end{bmatrix} \quad (22)$$

Indicando con Γ il rapporto $(12EJ)/(kGA l^2)$ nella (22), facendone l'inversa e applicando l'equilibrio, si ottiene la matrice di rigidezza dell'elemento fessurato modellato secondo la teoria di Timoshenko:

$$K^c = \begin{bmatrix} k_{11}^c & k_{12}^c & k_{13}^c & k_{14}^c \\ k_{21}^c & k_{22}^c & k_{23}^c & k_{24}^c \\ k_{31}^c & k_{32}^c & k_{33}^c & k_{34}^c \\ k_{41}^c & k_{42}^c & k_{43}^c & k_{44}^c \end{bmatrix} \quad (23)$$

con

$$k_{11}^c = -k_{13}^c = -k_{31}^c = k_{33}^c = \frac{12EJ}{(1 + \Gamma)l^3 + 24EJmR_{II}}$$

$$\begin{aligned}
 k_{12}^c = k_{14}^c = k_{21}^c = -k_{23}^c = -k_{32}^c = -k_{34}^c = k_{41}^c = -k_{43}^c &= \frac{6EJ}{(1+\Gamma)l^3 + 24EJmR_{II}} \\
 k_{22}^c = k_{44}^c &= \frac{EJ((4+\Gamma)l^3 + 6EJl^2nR_I + 24EJmR_{II})}{(l + 2EJnR_I)((1+\Gamma)l^3 + 24EJmR_{II})} \\
 k_{24}^c = k_{42}^c &= \frac{EJ((2-\Gamma)l^3 + 6EJl^2nR_I - 24EJmR_{II})}{(l + 2EJnR_I)((1+\Gamma)l^3 + 24EJmR_{II})}
 \end{aligned} \tag{24}$$

Si osservi come, nelle (24), ponendo $\Gamma=0$ ed annullando i termini R_I e R_{II} , dovuti alla presenza del crack, si ottengano proprio i termini della matrice di rigidezza nella teoria di Eulero-Bernoulli. Per quanto riguarda la matrice delle masse dell'elemento, nelle applicazioni del presente lavoro, si è tenuto conto anche dell'inerzia rotazionale, considerando le matrici \mathbf{M}_t delle masse consistenti per l'inerzia traslazionale ed \mathbf{M}_r delle masse consistenti per l'inerzia rotazionale, essendo $\mathbf{M} = \mathbf{M}_t + \mathbf{M}_r$ la matrice delle masse consistenti globale. Risulta:

$$\mathbf{M}_r = \frac{mJ}{l(1+\Gamma)^2} \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & \left(\frac{1}{10} - \frac{\Gamma}{2}\right)l & -\frac{6}{5} & \left(\frac{1}{10} - \frac{\Gamma}{2}\right)l \\ \left(\frac{2}{15} + \frac{\Gamma}{6} + \frac{\Gamma^2}{3}\right)l^2 & -\left(\frac{1}{10} - \frac{\Gamma}{2}\right)l & -\left(\frac{1}{30} + \frac{\Gamma}{6} - \frac{\Gamma^2}{6}\right)l^2 & \\ & \frac{6}{5} & -\left(\frac{1}{10} - \frac{\Gamma}{2}\right)l & \\ \text{SIMM.} & & \left(\frac{2}{15} + \frac{\Gamma}{6} + \frac{\Gamma^2}{3}\right)l^2 & \end{bmatrix} \tag{25}$$

$$\mathbf{M}_t = \frac{mAl}{(1+\Gamma)^2} \begin{bmatrix} \frac{13}{35} + \frac{7}{10}\Gamma + \frac{\Gamma^2}{3} & \left(\frac{11}{210} + \frac{11}{120}\Gamma + \frac{\Gamma^2}{24}\right)l & \frac{9}{70} + \frac{3}{10}\Gamma + \frac{\Gamma^2}{6} & -\left(\frac{13}{420} + \frac{3}{40}\Gamma + \frac{\Gamma^2}{24}\right)l \\ & \left(\frac{1}{105} + \frac{\Gamma}{60} + \frac{\Gamma^2}{120}\right)l^2 & \left(\frac{13}{420} + \frac{3}{40}\Gamma + \frac{\Gamma^2}{24}\right) & -\left(\frac{1}{140} + \frac{\Gamma}{60} + \frac{\Gamma^2}{120}\right)l^2 \\ & & \frac{13}{35} + \frac{7}{10}\Gamma + \frac{\Gamma^2}{3} & -\left(\frac{11}{210} + \frac{11}{120}\Gamma + \frac{\Gamma^2}{24}\right)l \\ \text{SIMM.} & & & \left(\frac{1}{105} + \frac{\Gamma}{60} + \frac{\Gamma^2}{120}\right)l^2 \end{bmatrix} \tag{26}$$

E' stata studiata l'influenza della deformabilità tagliante sulle prime tre frequenze di vibrazione di una trave fessurata tozza lunga 10 cm, avente le stesse caratteristiche geometrico-meccaniche di quella precedentemente analizzata. In Fig. 6 si riportano i risultati relativi al caso di una trave a mensola. I risultati mostrano come nel caso di trave di Timoshenko le frequenze risultino ridotte rispetto a quelle della trave di Eulero-Bernoulli ; ciò è in accordo con la maggiore deformabilità dell'elemento.

Le differenze nei valori delle frequenze giustificano la scelta di un modello più rigoroso per la caratterizzazione dinamica dell'elemento fessurato tozzo.

CONCLUSIONI

Nel lavoro si è indagato sul comportamento dinamico delle travi fessurate, modellando il crack con una cerniera elastica di opportuna deformabilità, oppure ricavando la matrice di rigidezza dell'elemento finito fessurato.

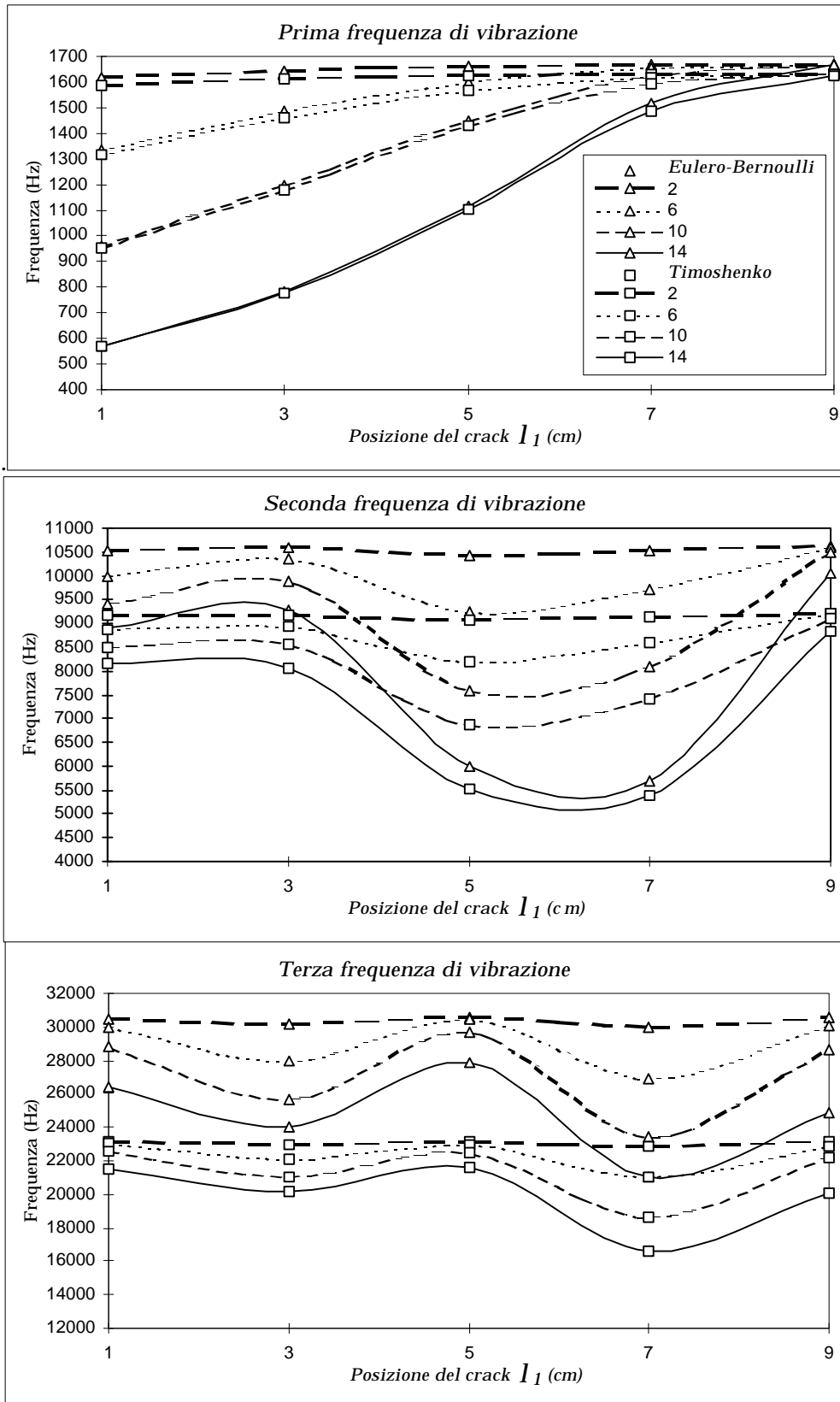


Figura 6: Influenza della deformazione tagliante sulle prime tre frequenze della trave fessurata

I risultati relativi alle ipotesi di Eulero-Bernoulli e di Timoshenko sono illustrati graficamente, per una particolare condizione di vincolo. Si vuol far notare che in presenza di travi fessurate, la deformazione tagliante ha un effetto maggiore sulle frequenze naturali superiori alla prima ed aumenta all'aumentare del numero di modo. Gli studi di Kosmatka mostrano che l'influenza della deformazione tagliante sulle pulsazioni naturali della trave integra è analoga a quella della trave con crack. Si è anche studiata l'influenza della snellezza sulle caratteristiche dinamiche della trave; per una fissata posizione e per un'assegnata profondità del difetto, sono state ricavate le prime tre frequenze di vibrazione in dipendenza della snellezza della trave (L/h). Dai risultati ottenuti si deduce che, per snellezze superiori a 12, è indifferente utilizzare un modello di trave o l'altro. Per travi con snellezze inferiori a 12, al contrario, è importante adottare il modello di Timoshenko, soprattutto per quanto riguarda i valori delle frequenze superiori alla prima

E' stato esaminato, altresì, l'effetto della matrice rotazionale delle masse sul calcolo delle caratteristiche dinamiche di una trave fessurata. Ebbene, si può osservare che l'importanza della matrice delle masse rotazionale cresce con il calcolo delle frequenze superiori alla prima e nel passare dallo studio di elementi tozzi a quello di elementi snelli; inoltre, non si riscontrano particolari differenze di influenza nello studio di elementi integri e di elementi fessurati.

RINGRAZIAMENTI: *Questo lavoro è stato svolto con il contributo finanziario del Ministero dell'Università e della Ricerca Scientifica e Tecnologica M.U.R.S.T (40%).*

BIBLIOGRAFIA

Gounaris, G., Anifantis, N. and Dimarogonas, A. D., 1991 "Dynamics of cracked hollow beams", Eng. Fract. Mech., Vol.39, No 6, pp.931-940.

Kosmatka, J.B., 1995, "An improved two-node finite element for stability and natural frequencies of axial-loaded Timoshenko beams", Comp.& Struct., Vol.57, No 1, pp.141-149.

Okamura, H., Watanabe, K., Takano, T., 1973, "Applications of the compliance concept in fracture mechanics", ASTM STP Vol.536, pp.423-438.

Qian, G.L., Gu, S.N., Jiang, J.S., 1990, "The dynamic behaviour and crack detection of beam with a crack", J. of Sound and Vibration, Vol 138, No. 2, pp. 233-243

Tada, H., Paris, P., Irwin, G., 1973, "The stress analysis of cracks handbook", Del Research Corporation, Hellertown, P.A.

Timoshenko, S., Young, D.H., Weaver, W., 1974, "Vibrations problems in engineering", Wiley & Sons, New York.

Viola, E., Hasan, W., 1995, "Sul problema dell'identificazione parametrica delle strutture nel dominio del tempo." Nota tecnica No 139. Facoltà d'ingegneria di Bologna.

Viola, E., Pascale, G., 1985, "Static analysis fatigue and fracture of cracked beam on elastic foundation", Eng. Fract. Mech., Vol.21, No 2, pp.365-375.

Yokoyama, T., 1996, "Vibration analysis of Timoshenko beam-columns on two-parameter elastic foundations", Comp.& Struct., Vol.61, No 6, pp.995-1007.