

EFFETTO SCALA NEI MATERIALI MACROSCOPICAMENTE ETEROGENEI

S. Briccoli Bati¹, G. Ranocchiai¹, G. Tempesta¹

¹*Dipartimento di Costruzioni, Università di Firenze
piazza Brunelleschi 6 - 50121 Firenze*

SOMMARIO: È noto che la presenza di difetti nella struttura dei materiali fa sì che le proprietà meccaniche siano interessate da effetti scala. Sotto il nome di effetto scala si indicano tutti i fenomeni di dipendenza delle proprietà del materiale dalla dimensione del campione osservato. Tali fenomeni possono essere di diversa natura: variazione delle proprietà intrinseche (o additive) nei mezzi con struttura geometrica di tipo frattale, con conseguente effetto scala indotto su tutte le proprietà; effetti di tipo Weibull; effetti indotti sulle proprietà estrinseche sensibili alla dissimmetria dei campioni eterogenei. In quanto segue si tenta una sintesi delle esperienze operate in questo settore, precisando alcuni concetti fondamentali, e si riportano i risultati di esperimenti numerici, che simulano prove di compressione semplice; le simulazioni sono state effettuate su provini estratti da un mezzo con difetti distribuiti periodicamente, analizzati sia nell'ipotesi di comportamento standard del materiale, che nell'ipotesi di debole reaganza a trazione.

PAROLE CHIAVE: effetto scala, effetto Weibull, elemento di volume rappresentativo, dimensione caratteristica, frattalità.

INTRODUZIONE

Quando si affronta lo studio di un materiale eterogeneo è necessario definire l'elemento di volume rappresentativo (R.V.E.); questo è il più piccolo elemento di volume in grado di rappresentare, almeno in media, la proprietà del materiale. In genere con questo termine si indica l'elemento di volume minimo rappresentativo della struttura del mezzo, che nel caso di un mezzo periodico va a coincidere con la cella base dalla cui traslazione esso viene generato.

Possiamo distinguere gli effetti scala a seconda che si manifestino analizzando campioni più piccoli del R.V.E. o viceversa. Gli effetti scala legati direttamente alla struttura del materiale, infatti, sono attivi al di sotto della dimensione del R.V.E. Questo avviene per tutte le proprietà intrinseche quando la struttura del materiale è di tipo frattale o multifrattale, come risulta evidente se si pensa che la frattalità induce una dipendenza delle proprietà geometriche dall'esponente frattale, che si trasmette a tutte le proprietà direttamente dipendenti dalla geometria (Barnsley, 1989). Un altro fenomeno evidente soltanto al di sotto della dimensione del R.V.E., va sotto il nome di effetto Weibull, ed è legato alla probabilità di ottenere difetti più evidenti all'interno di campioni di dimensione maggiore (Weibull, 1951). Gli effetti di tipo Weibull riguardano le proprietà estrinseche e sono più evidenti in campioni monodimensionali sottoposti a trazione, ma si riscontrano ovviamente anche in altre situazioni.

Gli effetti scala, attivi quando il campione è più grande del R.V.E., riguardano invece esclusivamente le proprietà estrinseche del materiale, ovvero quelle proprietà che sono

soggette ad omogeneizzazione (Suquet, 1987). Queste non sono legate direttamente al tipo di struttura del materiale, tuttavia danno origine al problema della definizione della dimensione caratteristica del materiale. Per dimensione caratteristica si intende quella dimensione a partire dalla quale una certa proprietà del materiale non risente più della dimensione del campione; questa individua, in pratica, l'elemento rappresentativo della proprietà stessa.

In quanto segue si riportano i risultati di esperimenti numerici effettuati su campioni di un materiale eterogeneo a struttura periodica analizzando, con particolare attenzione, il loro comportamento per dimensioni dello stesso ordine o maggiori dell'elemento di volume rappresentativo. La sperimentazione numerica ha permesso di tenere sotto controllo tutti quei fattori, specie quelli legati alla struttura del materiale, che di solito sono sconosciuti negli esperimenti di laboratorio.

DESCRIZIONE DEL PROGRAMMA DI PROVE

L'analisi che viene presentata simula la realizzazione di una indagine sperimentale operata su di un mezzo eterogeneo a struttura periodica.

Il materiale viene costruito mediante la riproduzione periodica di una cella base quadrata di quattro unità di lato, contenente una regione vuota di lato unitario, di forma pure quadrata (Fig. 1). I parametri fondamentali che descrivono l'eterogeneità del materiale periodico simulato sono costituiti dal gradiente delle proprietà delle fasi, che in questo caso sono spinte all'estremo, dal tipo dei difetti introdotti, in questo caso inclusioni, ed infine dalla dimensione e dalla distanza tra tali difetti. Nel caso prescelto la struttura prodotta è statisticamente isotropa a causa della isotropia delle proprietà delle fasi e delle caratteristiche geometriche prodotte dalla forma e dalla disposizione dei difetti.

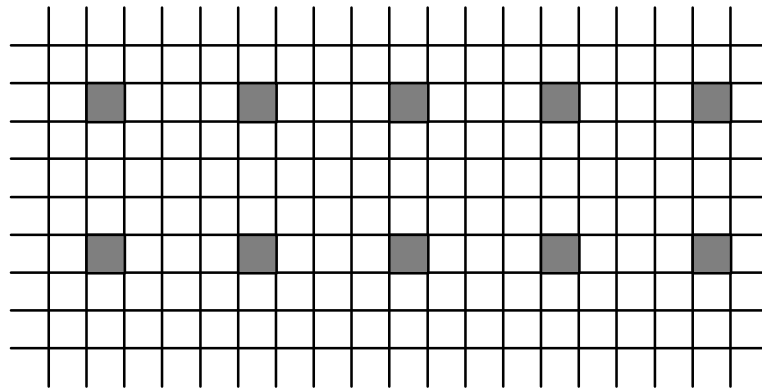


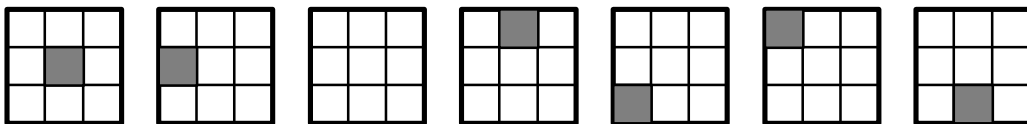
Figura 1: il mezzo elastico costruito per la realizzazione degli esperimenti numerici; in grigio le parti vuote.

Si immagina quindi di operare una campionatura casuale del materiale, traslando il campione ipotetico, di un passo pari alla unità di base. Si ottengono così alcune tipologie di campioni, da sottoporre ad una prova simulata di compressione, ognuna delle quali è caratterizzata da una certa frequenza statistica nella campionatura totale. Ad esempio il terzo campione della prima serie (Fig. 2), caratterizzato da non contenere difetti, ovvero celle vuote, avrà una probabilità maggiore degli altri di essere ottenuto nel procedimento

descritto, ed in particolare interverrà con una frequenza di sette su di una frequenza totale di sedici, se immaginiamo di spazzare un periodo della Fig. 1 con un campione di tre unità di lato.

L'operazione viene ripetuta ricavando campioni di dimensioni variabili, ovvero di lato pari a tre, quattro, sei, dodici e ventiquattro volte l'unità di base, e costruendo cinque serie di campioni possibili. Nelle figure 2, 3 e 4 sono riportate le prime tre serie di campioni per le quali il rapporto di scala è rappresentato come rapporto tra il lato del provino ed il lato del difetto (ovvero l'unità di base).

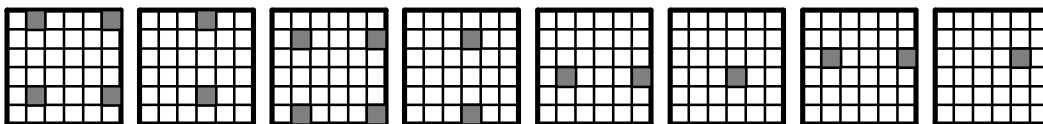
Si può osservare che i campioni della prima serie hanno dimensioni minore del R.V.E. (coincidente invece con quella dei campioni della seconda serie), per cui la concentrazione dei vuoti (proprietà intrinseca) non è costante nei vari campioni. Tuttavia la concentrazione media, calcolata a partire dalla frequenza relativa di ognuno dei campioni, è sempre pari ad $1/16$, cosa che non sarebbe avvenuta se la struttura del materiale fosse stata di tipo frattale. Tutti i campioni delle altre serie hanno dimensioni maggiori del R.V.E.; vale la pena osservare anche che, a causa della periodicità del mezzo, i campioni della terza serie, non essendo multipli della cella base, non sono rappresentativi della geometria del materiale, cosa che risulta evidente dalla variabilità della concentrazione dei difetti nei vari campioni ottenuti.



*Figura 2: provini della prima serie;
il rapporto tra il lato del campione ed il difetto è tre.*



*Figura 3: provini della seconda serie;
il rapporto tra il lato del campione ed il difetto è quattro.*



*Figura 4: provini della terza serie;
il rapporto tra il lato del campione ed il difetto è sei.*

L'analisi numerica è stata condotta utilizzando il codice a elementi finiti ANSYS, mediante l'uso di elementi quadrati (PLANE42), perché più adatti alla geometria in esame. L'esperimento numerico, ipotizzando uno stato piano di tensione, è stato guidato in modo da riprodurre, in maniera sufficientemente fedele, una prova meccanica reale,

con particolare attenzione alle condizioni al contorno. Il carico è stato applicato mediante l'interposizione di un piatto di ripartizione di rigidezza opportuna, al quale è stata lasciata la possibilità di ruotare. È infatti evidente che la scelta del piatto snodato, generalmente usato nell'analisi sperimentale, è determinante per i risultati che si otterranno quando si studi un campione che, per la presenza di eterogeneità nella propria struttura, genererà una eccentricità nella risposta meccanica.

Il contatto tra la piastra ed il campione è stato simulato mediante elementi CONTACT48, che hanno permesso di riprodurre un contatto privo di attrito. Lo schema della prova realizzata è riprodotto in Fig. 5, mentre in Tabella 1 sono riportate le proprietà meccaniche dei materiali costituenti la piastra e la matrice del campione.

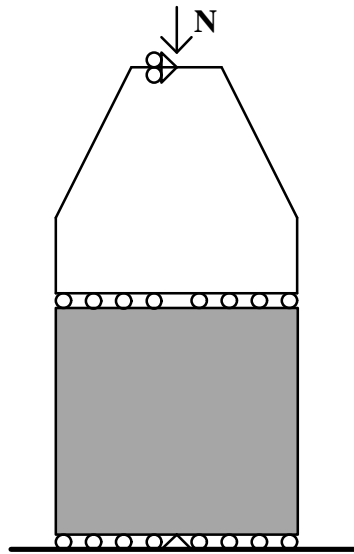


Figura 5: schema della prova numerica.

Tabella 1: proprietà meccaniche dei materiali usati nella simulazione.

	Materiale	Modulo di Young (Mpa)	Coefficiente di Poisson
Piastra	Acciaio	210000	0,33
Materiale matrice	Roccia tenera	20000	0,14

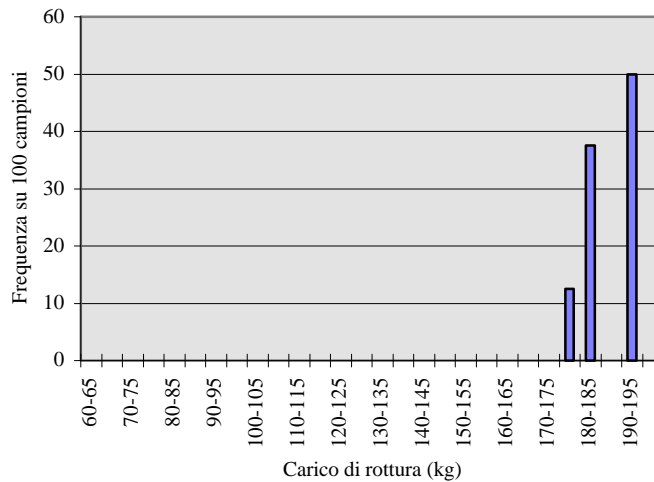
ANALISI DEI RISULTATI

L'analisi numerica elastico lineare dei campioni esaminati, ha permesso di determinare le tensioni principali, e quindi le tensioni ideali (criterio di resistenza di Grashoff o della massima deformazione), negli elementi più sollecitati, sia a trazione che a compressione. È stato quindi calcolato il moltiplicatore di carico necessario a produrre la prima fessurazione nei campioni, sia nell'ipotesi di isoreagenza, che nell'ipotesi di debole reagenza a trazione del materiale (Tabella 2). Una semplice analisi statistica ha permesso poi la realizzazione degli istogrammi di frequenza delle varie serie di campioni di diversa

dimensione, tenendo conto anche della frequenza relativa dei singoli campioni all'interno della serie (Fig. 6 e 7). Dai valori medi dei carichi di prima fessurazione, è possibile risalire al valore della tensione apparente di prima fessurazione dei campioni, riferendosi all'area nominale del campione. Nelle figure 8 e 9 sono riportati i valori della tensione di rottura nelle ipotesi di isoreagenza e di eteroreagenza del materiale, in funzione del rapporto di scala. La curva continua è stata ottenuta mediante regressione sui risultati relativi alla seconda, terza, quarta e quinta serie, omettendo il valore ricavato dall'analisi della prima serie, evidentemente influenzato dalla sua dimensione inferiore al volume elementare rappresentativo. Nel calcolo della curva di minima distanza si è reputato ragionevole la scelta di una funzione dotata di asintoto; si è immaginato cioè che per valori molto alti del rapporto di scala la resistenza apparente raggiunga un valore limite al crescere della dimensione del campione. In Fig. 10 sono riportati i valori del coefficiente di variazione dei risultati in funzione del rapporto di scala.

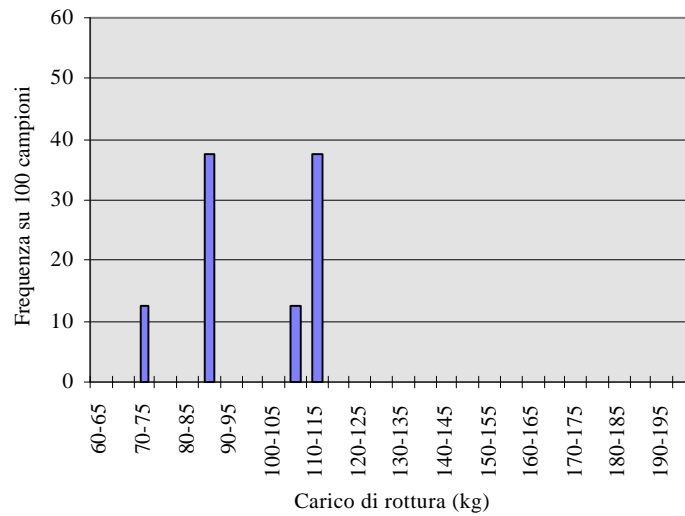
Tabella 2: valori di resistenza del materiale matrice.

Materiale matrice	Resistenza a trazione (Mpa)	Resistenza a compressione (Mpa)
Isoreagente	+10	-10
Eteroreagente	+1	-10



Indici di variabilità		
Media Aritmetica Ponderata	M (kg)	185,97
Scostamento Quadratico Medio	σ (kg)	5,497
Coefficiente di Variazione	C (%)	3,00

Figura 6: istogramma di frequenza e indici di variabilità per i campioni della quinta serie considerati isoreagenti.



Indici di variabilità		
Media Aritmetica Ponderata	M (kg)	96,870
Scostamento Quadratico Medio	σ (kg)	13,510
Coefficiente di Variazione	C (%)	14,00

Figura 7: istogramma di frequenza e indici di variabilità per i campioni della quinta serie considerati eteroreagenti.

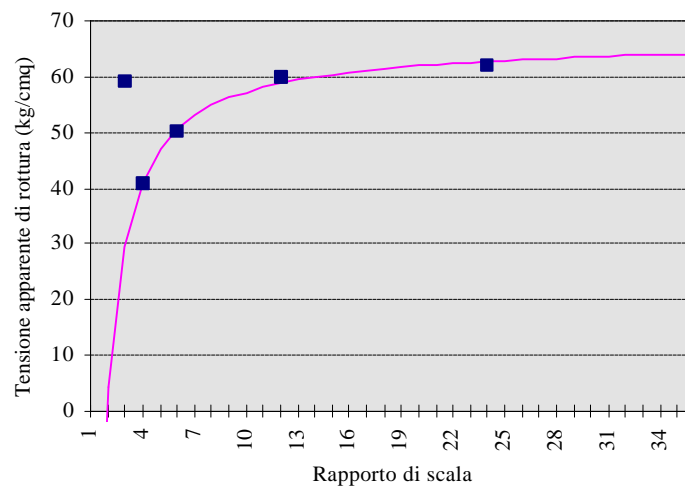


Figura 8: carico di prima fessurazione in funzione del rapporto di scala per i campioni isoreagenti; in tratto continuo la funzione di regressione (coefficiente di correlazione $r = 0,992$):

$$66,676 - (94,220/x) - 113,98 e^{-x}$$

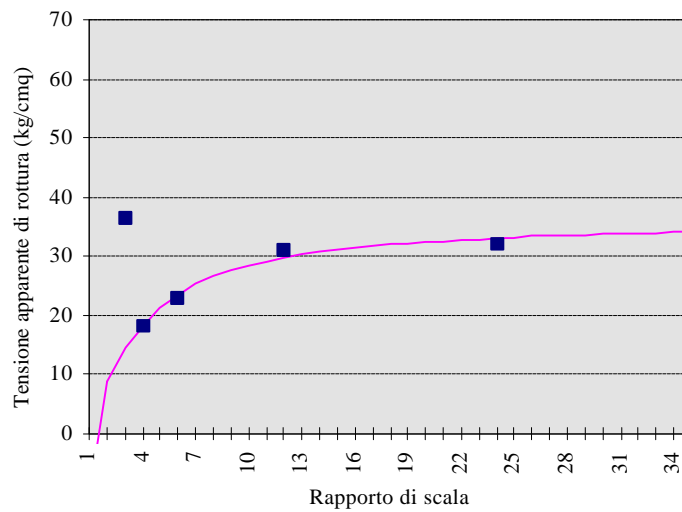


Figura 9: carico di prima fessurazione in funzione del rapporto di scala per i campioni eteroreagenti; in tratto continuo la funzione di regressione (coefficiente di correlazione $r = 0,982$):
 $36,331 - (78,263/x) + 85,826 e^{-x}$

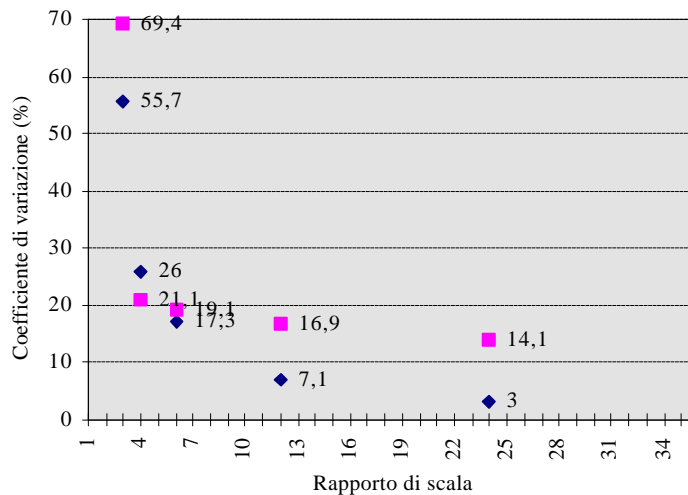


Figura 10: coefficiente di variazione per il carico di prima fessurazione in funzione del rapporto di scala, per i campioni isoreagenti (nero) e eteroreagenti (grigio).

L'analisi dei risultati permette di osservare che nell'ipotesi di eteroreagenza del materiale sia l'effetto scala che la dispersione dei risultati sono amplificati. Il valore limite della resistenza apparente dei campioni al crescere della dimensione, rappresentato nei dati sperimentali dall'asintoto della curva di regressione, può essere calcolato immaginando che in questa situazione l'eccentricità indotta dalla presenza di difetti sia nulla. Così facendo otterremo per il materiale isoreagente una tensione di compressione apparente massima di 75 kg/cmq, e per il materiale eteroreagente una tensione di compressione di 47,62 kg/cmq, semplicemente immaginando la tensione ammissibile uniformemente

distribuita sull'area effettiva reagente della sezione affetta da porosità, e calcolando poi la tensione apparente risultante sull'area nominale del campione. È evidente che i valori ottenuti nell'analisi numerica sono ben lontani dai valori teorici attesi nel caso di grandi dimensioni dei campioni. Inoltre possiamo notare che l'analisi di regressione operata sui risultati ottenuti indica un asintoto rispettivamente per valori della tensione apparente di 66,676 e di 36,631 kg/cmq, valori questi ben lontani da quelli teorici, specialmente nel caso di debole reaganza a trazione. Uno dei motivi di questi risultati è sicuramente legato al tipo di discretizzazione operata nel produrre la tessitura del materiale prima ed i campioni da sottoporre a compressione poi. Infatti il minimo elemento di volume rappresentativo ha dimensione pari in termini di unità di base, come tutti i campioni a partire dalla seconda serie. Utilizzando ancora l'unità di base come reticolo di traslazione, si fa sì che nessuno dei campioni costruiti sia dotato di simmetria. Questa situazione naturalmente non si verifica nei materiali reali che sono dotati della proprietà di omogeneità statistica, ma è legata alla periodicità del mezzo in esame. Nel caso invece di campioni dotati di debole reaganza a trazione, si è indotti a credere che il discostamento tra comportamento teorico e comportamento reale sia da imputare alla stessa proprietà di eteroreaganza; nell'esperienza quotidiana in effetti i fenomeni di effetto scala vengono generalmente attribuiti a materiali fragili e fessuranti, caratterizzati tutti da debole reaganza a trazione. Il tipo di considerazione operata inoltre contiene una notevole approssimazione nel fatto che l'asintoto teorico è stato valutato a partire da una distribuzione uniforme di tensione, cosa che, come ben si sa, non si verifica mai in un materiale elastico affetto da porosità, specie nel caso in cui la distanza tra i vuoti sia sufficientemente piccola da permetterne l'influenza reciproca (Mori e Tanaka, 1973).

CONCLUSIONI

Nel corso della indagine sono stati evidenziati evidenti effetti scala, pur analizzando un materiale a struttura periodica molto semplice. Innanzi tutto è stata evidenziata la brusca transizione di comportamento in corrispondenza di campioni di dimensioni pari a quelle del R.V.E., a partire della quale la proprietà di resistenza si incrementa al diminuire della dimensione del campione, in dipendenza di un effetto tipo Weibull. Si è poi potuto osservare come gli effetti scala prodotti quando il campione è più grande del R.V.E. siano indotti dalla eccentricità della risposta meccanica del campione stesso; essi sono più evidenti nel caso in cui il materiale è eteroresistente. Osservando la variazione della proprietà di resistenza in funzione del fattore di scala, si può interpretare l'asintoto della curva di regressione che la approssima, come la proprietà effettiva, che sarebbe possibile ottenere sperimentalmente impiegando un campione sufficientemente grande. In questo caso sarebbe necessario un campione di circa 15 volte più grande del difetto per ottenere una resistenza apparente che si discosti del 10% dal valore effettivo, se il campione è isoreagente, e di addirittura 25 volte più grande se il campione è eteroreagente. Nei due casi si otterrebbe un coefficiente di variazione del 6,5% e del 14% circa, rispettivamente. Questi valori sono alti se si pensa alle vigenti norme sulla determinazione della resistenza a compressione del calcestruzzo, che impongono un campione di sole sette volte più grande dell'inerte maggiore; bisogna però tener conto che in quest'ultimo caso il gradiente tra le proprietà meccaniche delle fasi è estremamente più ridotto. Inoltre per ottenere delle indicazioni più precise sarebbe necessario isolare i parametri che influiscono sulla

struttura del mezzo periodico, cioè il gradiente dei resistenza e di elasticità delle fasi, l'interasse e la dimensione delle inclusioni.

BIBLIOGRAFIA

Barnsley, M., 1989, "Fractals everywhere", Academic Press, Boston.

Jaquin, Ch., "Structures des réseaux poreux et propriétés pétrophysiques des roches", Rev. Franç. de Géoth., Vol. 49, pp. 25-42.

Mori, T., Tanaka, K., 1973, "Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions", Acta Met., Vol. 21, pp. 531-574.

Morlier, P., Amokrane, K., Duchamps, J.M., 1989, "L'effet d'échelle en mécanique des roches - recherche de dimensions caractéristiques", Rev. Franç. de Géoth., Vol. 49, pp. 5-13.

Suquet, P.M., 1987, "Elements of homogenization for inelastic solid mechanics", Homogenization techniques for composite media, E. Sanchez-Palencia e A. Zaoui (Ed.), Springer-Verlag, Berlino, pp. 194-275.

Weibull, W., 1951, "A statistical distribution function of wide applicability", J. of Appl. Mech., pp. 293-297.

La ricerca è stata realizzata con i fondi MURST 40%.