

TRIASSIALITÀ E ROTTURA DUTTILE NEI METALLI ATTRAVERSO UN MODELLO NON LINEARE DI DANNO

Nicola Bonora

*Dipartimento di Ingegneria Industriale, Università di Cassino
Via G. Di Biasio 43, 03043 Cassino*

SOMMARIO: La duttilità è uno dei parametri di progetto per la scelta del materiale in molte applicazioni nelle quali si richiede al materiale di sopportare grandi deformazioni plastiche. Tuttavia questo parametro varia sensibilmente con lo stato di sforzo. È noto da tempo che stati di sforzo di trazione triassiali riducono la duttilità mentre stati di compressione idrostatica innalzano sensibilmente la deformazione a rottura del materiale. In questo lavoro viene ricavata una relazione analitica che lega la duttilità del materiale allo stato di sforzo attraverso il fattore di triassialità utilizzando un modello non lineare di danno. La soluzione proposta è stata confrontata con altre soluzioni disponibili in letteratura ed è stata verificata attraverso il confronto con i dati sperimentali di diversi acciai. L'ottimo accordo con i dati sperimentali rappresenta inoltre una verifica indiretta della validità del modello di danno adottato.

KEYWORDS: danno duttile, triassialità, duttilità, plasticità, *continuum damage mechanics* (CDM)

INTRODUZIONE

Nella progettazione meccanica sempre più spesso si incontrano applicazioni in cui la presenza di deformazioni plastiche è significativa ed inevitabile. In molti casi, come ad esempio nella progettazione dei contenitori in pressione in caso di incidente severo, si richiede che il materiale sia in grado di dissipare energia deformandosi plasticamente.

Il fenomeno della rottura duttile nei metalli è stato argomento di studio sin dai primi anni '50. Partendo dagli assunti di meccanica della frattura sviluppati per la rottura fragile, per molto tempo si è cercato di individuare un parametro caratteristico della rottura duttile impiegando concetti macroscopici come COD (crack opening displacement) ed integrali energetici modificati a partire dal J-integral inizialmente introdotto da Rice. Parallelamente, il fenomeno della rottura duttile è stato affrontato dal punto di vista microscopico al fine di individuare l'effettivo micromeccanismo di rottura. McClintock (1968) e Rice e Tracy (1969) hanno riconosciuto nel processo di crescita dei microvuoti il principale meccanismo di rottura. Tale processo può essere schematizzato in tre fasi: inizialmente i vuoti si formano nella matrice duttile in corrispondenza delle parcelle incluse o dei precipitati di seconda fase; successivamente i vuoti crescono sotto l'azione delle sollecitazioni esterne fino a che la distanza tra due o più vuoti non raggiunge la dimensione critica in corrispondenza della quale si ha la coalescenza delle cavità. Recentemente Shih e Liu (1995) e Shih ed altri (1995) hanno dimostrato inequivocabilmente l'impossibilità di descrivere attraverso un solo parametro il processo di rottura duttile nei metalli. Sulla base del processo di crescita dei microvuoti, sono stati

proposti molti modelli costitutivi per i materiali duttili in presenza di porosità. In questi modelli, accanto al concetto di sforzo e deformazione, il danno è la variabile costitutiva in grado di tener conto della progressiva riduzione della capacità del materiale di sostenere i carichi. Questi modelli di danno rappresentano oggi uno strumento indispensabile per comprendere e prevedere il comportamento di un materiale in presenza di estese deformazioni plastiche senza dover ricorrere a teorie correttive (T-stress e Q-stress) sulla perdita o meno di *constraint* di una particolare geometria.

Sia nella progettazione tradizionale sia nei modelli costitutivi più avanzati, il concetto di deformazione a rottura, ovvero la massima deformazione per cui si ha il cedimento ultimo del materiale, è uno dei parametri fondamentali dal quale non si può prescindere.

Nel processo di rottura duttile, la deformazione a rottura del materiale risulta essere fortemente influenzata dallo stato di sollecitazione. È noto da tempo che la presenza di uno stato di sforzo multiassiale di trazione riduce sensibilmente il valore della deformazione a rottura rispetto al valore misurato in un test di trazione monoassiale mentre uno stato di compressione idrostatico innalza di molto la deformazione a rottura del materiale. Nel presente lavoro la legge di evoluzione della deformazione a rottura in funzione del fattore di triassialità delle tensioni viene ricavata sulla base di un modello di danno non lineare precedentemente proposto dall'autore (Bonora, 1997) e verificata mediante il confronto con dati sperimentali relativi a diversi tipi di acciaio. Il confronto con altre relazioni ottenute sia analiticamente (Rice e Tracy, 1969, McClintock, 1968 Lemaitre, 1985) sia empiricamente (Manjoine, 1985) consente di valutare l'accuratezza del modello proposto per il quale si richiede la conoscenza di soli tre parametri misurabili attraverso la sola prova di trazione uniassiale.

MODELLO NON LINEARE DI DANNO

Nella Continuum Damage Mechanics, il comportamento di un materiale in presenza di danneggiamento può essere descritto attraverso un'insieme di equazioni costitutive in cui il danno è una delle variabili interne. La variabile danno esprime la perdita di capacità di un materiale di sostenere i carichi. Se consideriamo un volume elementare di riferimento (RVE), l'effetto della presenza di microvuoti, inclusioni, etc. si traduce in una riduzione dell'area effettivamente resistente. Pertanto, nelle ipotesi generali di danno isotropo, possiamo dare la seguente definizione operativa della variabile di danno D :

$$D = 1 - \frac{A_{eff}}{A_0} \quad (1)$$

dove A_0 è la sezione nominale dell'RVE e A_{eff} è l'effettiva sezione resistente.

Lemaitre ha proposto un modello di danno da deformazioni plastiche sulla base delle seguenti ipotesi:

- a) Con il termine danno si indicano tutti quei fenomeni irreversibili che hanno luogo nella microstruttura di un materiale e il cui effetto è quello di ridurre la capacità del materiale di sostenere i carichi;
- b) per la variabile di danno esiste un funzionale di dissipazione, analogo a quello per la plasticità che dipende solo dalla variabile interna ad esso associata; il funzionale di dissipazione totale può pertanto essere scritto come:

$$F = F_p(\sigma, R, X; D) + F_D(Y; p, D) \quad (2)$$

dove F_p è il potenziale di dissipazione plastico che dipende dall'*hardening back stress* isotropico e cinematico R e X ; mentre F_D è il funzionale di dissipazione del danno funzione della variabile interna Y associata a D .

- c) la dissipazione associata alla crescita di microcavità è un processo altamente non-lineare: il funzionale di danno deve dipendere dalla deformazione plastica effettiva accumulata.
- d) la variabile di danno D e la deformazione plastica sono accoppiate; nella legge cinetica di evoluzione del danno questa proprietà è espressa dal moltiplicatore plastico il quale è proporzionale alla deformazione plastica effettiva accumulata;
- e) il danno da plasticità individua una microscala all'interno della quale gli effetti rimangono localizzati sino alla rottura di uno o più volumi di riferimento elementari (RVE). La localizzazione dei processi di danno può essere osservata sperimentalmente comparando le misure di perdita di rigidezza, in un provino a forma di clessidra, ottenute con uno strain gauge locale, posizionato sulla sezione minima, con quelle ottenute con un piccolo clip gauge posizionato a cavallo della sezione minima. Lo strain gauge misurerà le variazioni di rigidezza del materiale non appena la deformazione plastica supererà il valore di soglia ϵ_{th} . Al contrario, il clip-gauge rivelerà variazioni di rigidezza solo dopo che una cricca macroscopica si è formata per rottura di più volumi elementari, (Bonora et alii, 199a and Hancock and Meckenzie, 1976).
- f) gli effetti di del danno modificano solamente le componenti sforzo: il materiale danneggiato è pertanto descrivibile attraverso le stesse equazioni costitutive del materiale vergine tranne che per le componenti di sforzo che sono sostituite con quelle di sforzo effettive;
- g) si assume la decomponibilità delle deformazioni totali.

Assumendo per il potenziale di dissipazione plastico un criterio di snervamento alla Mises, l'insieme delle equazioni costitutive per il materiale danneggiato è dato da,

$$\dot{\epsilon}_{ij}^e = \frac{1+n}{E} \frac{\dot{s}_{ij}}{1-D} - \frac{n}{E} \frac{\dot{s}_{kk}}{1-D} d_{ij} \quad (3)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\sqrt{F_p}}{\sqrt{s_{ij}}} = \frac{3}{2} \dot{\lambda} \frac{\left(\frac{s_{ij}}{1-D} - X_{ij} \right)}{\left(\frac{s}{1-D} - X \right)_{eq}} \quad (4)$$

$$\dot{\alpha}_{ij} = -\dot{\lambda} \frac{\sqrt{F_p}}{\sqrt{X_{ij}}} = \dot{\epsilon}_{ij}^p (1-D) - \frac{3}{2X_\infty} X_{ij} \dot{\lambda} \quad (5)$$

$$\dot{r} = -\dot{\lambda} \frac{\sqrt{F_p}}{\sqrt{R}} = \dot{\lambda} = \dot{p}(1-D) \quad (6)$$

$$\dot{D} = -\dot{\lambda} \frac{\partial F_D}{\partial Y} \quad (7)$$

dove s_{ij} è il deviatore delle tensioni e p è la deformazione plastica equivalente effettiva accumulata. L'insieme delle equazioni risulta essere definita completamente una volta scelta l'espressione del funzionale di dissipazione del danno. È importante sottolineare come la scelta del funzionale determini l'espressione della legge di evoluzione del danno in funzione della deformazione plastica. I risultati sperimentali ottenuti da LeRoy ed al. (1981) hanno inequivocabilmente dimostrato la natura non lineare del legame tra danno e deformazione plastica. Recentemente alcuni autori (Chandrankanth e Pandey, 1993) hanno proposto modelli di CDM in cui la legge di evoluzione della variabile di danno è di tipo esponenziale. Tuttavia, le misure sperimentali di danno ottenute da Chou e Wang (1987) su leghe di alluminio Al7075 e da Bonora ed al. (1996) su leghe di Al-SI 2091 hanno dimostrato come l'evoluzione del danno in funzione della deformazione plastica può seguire diversi andamenti caratterizzati da differenti concavità. In figura 1 vengono riportati alcuni esempi di evoluzione della variabile di danno in funzione della deformazione plastica.

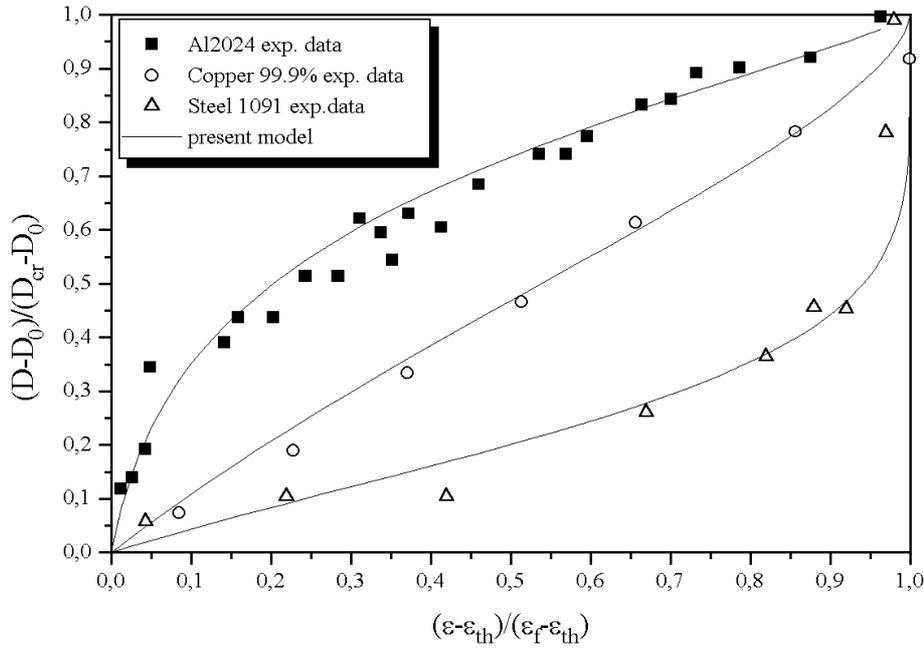


Fig. 1 - Possibili andamenti della variabile di danno in funzione della deformazione plastica effettiva.

L'autore ha proposto per il potenziale di dissipazione di danno la seguente espressione,

$$F_D = \left[\frac{1}{2} \left(-\frac{Y}{S_0} \right)^2 \cdot \frac{S_0}{1-D} \right] \cdot \frac{(D_{cr} - D)^{\alpha-1}}{p^n} \quad (8)$$

dove D_{cr} è il valore del danno critico per il quale si ha la rottura duttile, α è un'esponente di danno che caratterizza la forma della legge di evoluzione del danno con la deformazione plastica, S_0 è una costante del materiale ed n è l'esponente di incrudimento nella relazione di Ramberg-Osgood. Il termine tra parentesi quadre corrisponde al

potenziale di danno proposto inizialmente da Lemaitre. Il termine fuori dalle parentesi quadre tiene conto del fatto che la dissipazione durante il processo di crescita dei microvuoti dovrà presumibilmente essere differente a seconda che le cavità stiano nucleando, crescendo o coalescendo. La determinazione esatta della dissipazione associata ad ogni singola fase di crescita di un microvuoto è difficile. Tuttavia è possibile utilizzare la deformazione plastica come un indicatore per individuare quale delle tre fasi di crescita dei microvuoti sia dominante in un generico RVE.

La legge cinetica di evoluzione del danno è allora data da,

$$dD = a \cdot \frac{(D_{cr} - D_0)^{\frac{1}{a}}}{\ln(e_{cr} / e_{th})} \cdot f\left(\frac{s_H}{s_{eq}}\right) \cdot (D_{cr} - D)^{\frac{a-1}{a}} \cdot \frac{dp}{p} \quad (9)$$

dove D_0 è il danno inizialmente presente nel materiale, ε_{th} e ε_{cr} sono la deformazione plastica monoassiale per cui i processi di danno sono attivati e la deformazione a rottura del materiale. Il danno da plasticità è sensibile sia all'energia di deformazione a taglio sia a quella di deformazione volumetrica in quanto il processo di crescita dei microvuoti è condizionato dalla componente idrostatica del tensore delle tensioni. Per un materiale caratterizzato da uno stato di danno assegnato, l'energia di deformazione elastica può essere decomposta nei due contributi di variazione volumetrica e di distorsione. Poiché lo stato di danno non subisce modificazione nel regime elastico e nell'ipotesi di danno isotropo, l'energia di deformazione elastica per uno stato triassiale di danno può essere scritta nella seguente forma,

$$W^e = W^D + W^m = \int s_{ij} d\varepsilon_{ij}^D + \int \sigma_m d\varepsilon_m = \frac{1}{2} \left(\frac{1+\nu}{E} \frac{s_{ij}s_{ij}}{1-D} + 3 \frac{1-2\nu}{E} \frac{\sigma_m^2}{1-D} \right) \quad (10)$$

Supponendo che l'energia di deformazione elastica sia equivalente a quella in regime monoassiale di sforzo in presenza di una tensione effettiva equivalente σ^* e ricordando l'espressione della tensione equivalente di von Mises, ne consegue:

$$W^e = \frac{\sigma_{eq}}{2(1-D)} \left[\frac{2}{3} (1+\nu) + 3(1-2\nu) \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}} \right)^2 \right] = \frac{\sigma^*}{2(1-D)} \quad (12)$$

dove,

$$\sigma^* = \sigma_{eq} \cdot f\left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}}\right) \quad (13)$$

$$f\left(\frac{s_m}{s_{eq}}\right) = \frac{2}{3} (1+n) + 3(1-2n) \left(\frac{s_m}{s_{eq}} \right)^2 \quad (14)$$

Il termine $f(\sigma_m/\sigma_{eq})$ esprime l'effetto di uno stato triassiale di danno sulla tensione equivalente.

STATO DI SFORZO TRIASSIALE E DUTTILITÀ

Con il termine duttilità si intende la deformazione vera di un metallo in corrispondenza della quale si ha la rottura. La duttilità è pertanto definita dalla seguente relazione,

$$\varepsilon_f = \ln\left(\frac{A_0}{A_f}\right) \quad (15)$$

dove A_0 è la dimensione della sezione iniziale ed A_f è la misura della sezione a rottura. Normalmente la duttilità viene misurata su provini cilindrici in test di trazione monoassiali. L'effetto di uno stato di sforzo triassiale sulla duttilità di un metallo è stato ampiamente studiato sperimentalmente da Hancock e Meckenzie (1976) su acciai ad alta resistenza. Questo studio è stato effettuato utilizzando la tecnica proposta da Earl e Brown (1976) attraverso l'impiego di provini cilindrici intagliati circonferenzialmente con differenti raggi di intaglio. Utilizzando la relazione di Bridgman per l'andamento della triassialità lungo la sezione minima, Hancock e Mckenzie hanno correlato la duttilità al livello di triassialità individuando una relazione non lineare, inversamente proporzionale, tra questi due parametri. Un andamento di questo tipo era già stato anticipato da Rice e Tracy i quali avevano per la duttilità una diminuzione esponenziale con l'aumentare della triassialità,

$$e_f = C_0 \cdot \exp\left(-\frac{3 S_m}{2 S_{eq}}\right) \quad (16)$$

dove C_0 è una costante del materiale. McClintock, studiando l'evoluzione di vuoti ellittici ha trovato una relazione analoga,

$$\varepsilon_f = \frac{(1-n) \cdot \ln(l_0 / b_0)}{\sinh\left[\frac{\sqrt{3}}{2}(1-n)\left(\frac{\sigma_a + \sigma_b}{\sigma_{eq}}\right)\right] + \frac{3}{4}\left(\frac{\sigma_b - \sigma_a}{\sigma_{eq}}\right)} \quad (17)$$

dove l_0 e b_0 sono la dimensione iniziale del microvuoto e della cella, σ_a e σ_b sono le componenti di sforzo principali nella matrice secondo gli assi del vuoto, mentre n è l'esponente di incrudimento come definito nella relazione di Ludwik.

Tuttavia queste relazioni analitiche seguono i dati sperimentali in maniera molto approssimata. In figura 2 e 3 vengono ad esempio riportati il confronto tra il modello di previsione di Rice e Tracy ed i dati sperimentali per un acciaio Q1 testato secondo le due direzioni LT e ST. Anche Lemaitre (1985) nel suo modello di danno lineare ha ricavato una relazione che esprime la variazione della duttilità in presenza di uno stato di sforzo multiassiale,

$$(p_f - p_{th}) = \frac{(e_f - e_{th})}{\frac{2}{3}(1+n) + 3(1-2n)\left(\frac{S_m}{S_{eq}}\right)^2} \quad (18)$$

tuttavia anche in questo caso, fig. 2 e 3, il confronto con i dati sperimentali mostra come la previsione della duttilità sia molto approssimata soprattutto in regime di elevata triassialità. Utilizzando il modello di danno proposto inizialmente dall'autore è possibile integrare l'eqn (9) nel caso monoassiale per cui il termine $f(\sigma_m/\sigma_{eq})$ è pari ad 1/3. In questo caso la legge di evoluzione del danno diventa,

$$D = D_0 + (D_{cr} - D_0) \cdot \left\{ 1 - \left[1 - \frac{\ln(e/e_{th})}{\ln(e_f/e_{th})} \right]^a \right\} \quad (19)$$

La stessa eqn. (9) può essere integrata nel caso di *proportional loading* dove il termine $f(\sigma_m/\sigma_{eq})$ si mantiene costante durante l'integrazione. Un caso di *proportional loading* è ad esempio quello dei provini cilindrici intagliati circonferenzialmente in cui l'andamento della triassialità lungo la sezione minima è indipendente dal carico di trazione applicato ed è funzione solo del rapporto tra i diametri minimo e remoto e del raggio di intaglio, Bonora ed al (1996b).

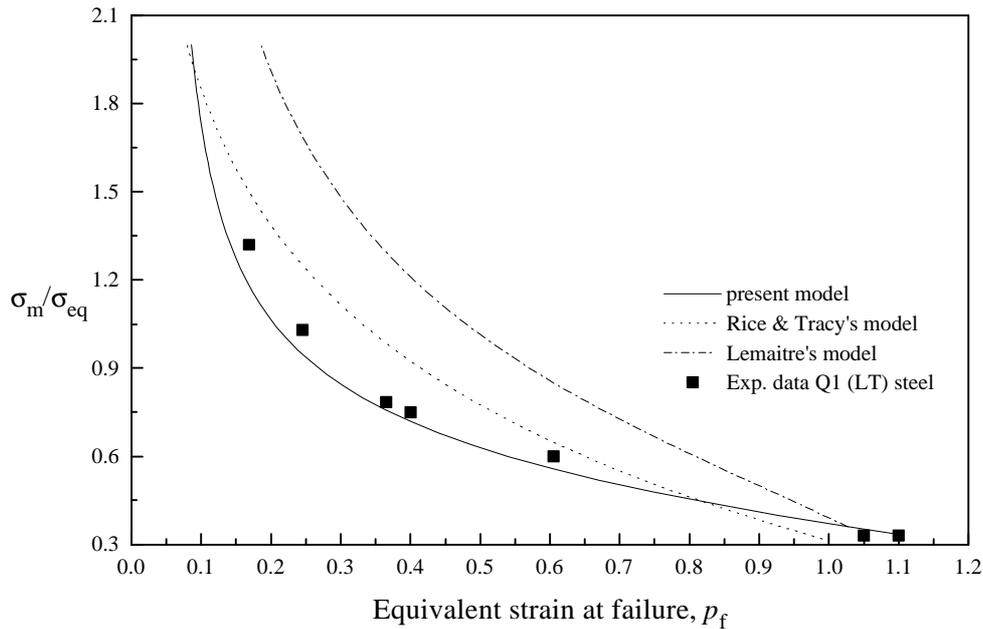


Fig. 2 - Andamento della duttilità in funzione della triassialità per un acciaio Q1(LT): confronto tra la soluzione di Rice e Tracy, Lemaitre ed il presente modello

In questo caso la legge di evoluzione del danno in presenza di un regime di sforzo multiassiale è data da,

$$D = D_0 + (D_{cr} - D_0) \cdot \left\{ 1 - \left[1 - \frac{\ln(p/p_{th})}{\ln(e_f/e_{th})} \cdot f\left(\frac{S_H}{S_{eq}}\right) \right]^a \right\} \quad (20)$$

dove p è la deformazione plastica effettiva accumulata in presenza di uno stato multiassiale di sforzo mentre p_{th} rappresenta il valore per cui i processi di danno si attivano. Quanto si ha la rottura D raggiunge il valore critico D_{cr} e p raggiunge il corrispondente valore critico p_{cr} . Dividendo membro a membro l'eqn. (18) e (19), si ottiene,

$$\ln\left(\frac{e_f}{e_{th}}\right) = f\left(\frac{S_H}{S_{eq}}\right) \cdot \ln\left(\frac{p_{cr}}{p_{th}}\right) \quad (21)$$

questa relazione fornisce un'espressione che lega i valori di deformazione caratteristici di un materiale sottoposto a danno duttile nel passaggio dal caso monoassiale a quello triassiale di sforzo. Per poter ricavare l'espressione della duttilità p_{cr} in regime triassiale è necessario conoscere il valore o la legge di evoluzione di p_{th} .

Thomson and Hancock (1984) hanno attentamente analizzato sperimentalmente i valori di deformazione in corrispondenza dei quali aveva inizio il fenomeno di nucleazione, per un acciaio puro di produzione svedese, in differenti regimi di triassialità.

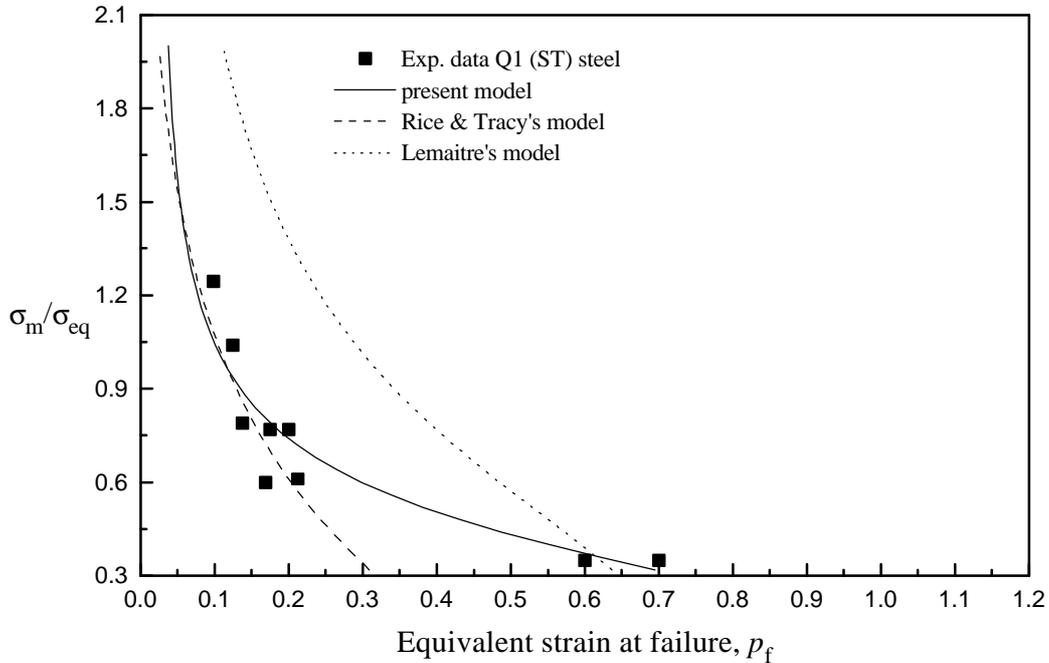


Fig. 3 - Andamento della duttilità in funzione della triassialità per un acciaio Q1(ST): confronto tra la soluzione di Rice e Tracy, Lemaitre ed il presente modello

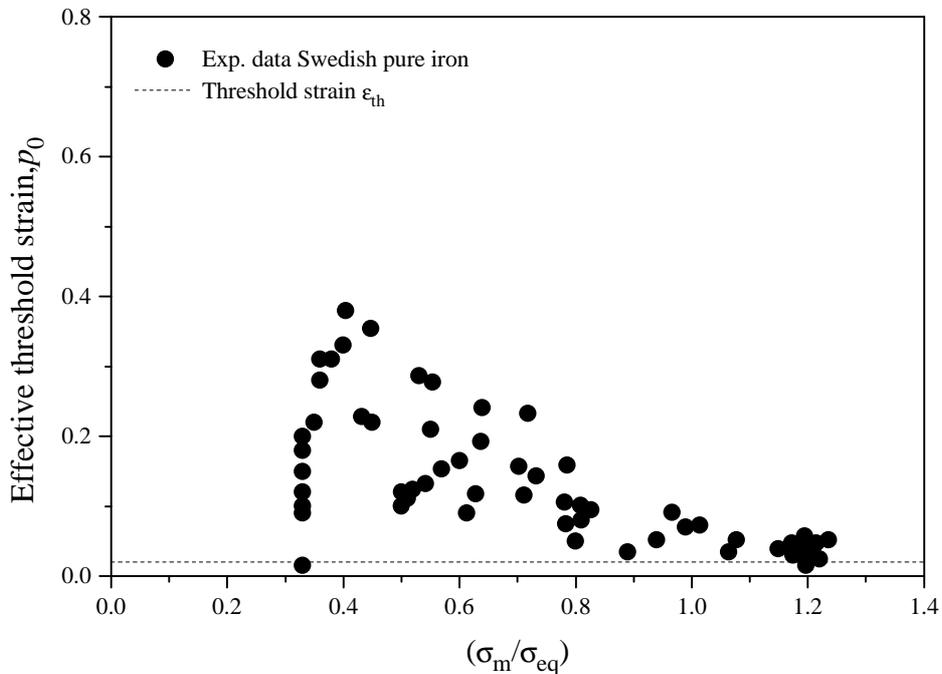


Fig. 4 - Dispersione sperimentale delle misure di deformazione di soglia

Questo studio ha evidenziato due risultati importanti:

- a) il valore di deformazione plastica effettiva per cui si ha l'inizio del processo di nucleazione di microcavità sembra non dipendere dal regime di sforzo triassiale;
- b) la dispersione sperimentale relativa a questo valore di soglia p_{th} è tanto maggiore quanto più lo stato di sforzo è vicino al caso monoassiale.

Quest'ultimo punto può essere spiegato osservando che in regime di bassa triassialità le inclusioni e la loro distribuzione nella matrice duttile hanno un effetto maggiore nella localizzazione dei processi di danno. Effetto che viene smorzato in regime di elevata triassialità. In figura 4 vengono riportate le misure di deformazione di soglia per differenti valori del fattore di triassialità per un acciaio di produzione svedese. Pertanto, assumendo che p_{th} sia praticamente pari a e_{th} , la relazione (20) può essere finalmente riscritta come,

$$p_f = e_{th} \cdot \left(\frac{e_f}{e_{th}} \right)^{1/f(S_m/S_{eq})} \quad (22)$$

Questa relazione è stata verificata confrontando l'andamento della duttilità in funzione del fattore di triassialità con i valori sperimentali per diversi acciai. In fig. 2 e 3, il confronto con i dati sperimentali relativi ad un acciaio Q1, secondo le direzioni TL e ST, mostra l'elevato grado di accuratezza della soluzione proposta soprattutto in relazioni ad altri modelli. In particolare il confronto con la soluzione di Lemaitre sottolinea l'inadeguatezza di un'ipotesi di danno lineare. In fig. 5 viene riportato il confronto tra il modello proposto ed i dati sperimentali relativi ad un acciaio HY130 testato nelle direzioni LT e ST. Anche in questo caso l'accordo con i dati sperimentali è ottimo. È importante osservare come la relazione proposta necessiti solo di tre parametri che possono essere agevolmente misurati in un'unica prova di trazione secondo la procedura descritta in dettaglio dall'autore (1997). Inoltre, la qualità dell'accordo del modello con i dati sperimentali non risulta essere casuale ma dipende fortemente da i valori di ϵ_{th} , ϵ_f e n scelti per il materiale in esame. In fig. 6 viene ad esempio riportato il confronto tra i possibili andamenti della duttilità in funzione del fattore di triassialità per differenti valori della deformazione di soglia ϵ_{th} .

CONCLUSIONI

Nel presente lavoro ci si è occupati di sviluppare un modello di previsione per l'evoluzione della deformazione a rottura in regime duttile in funzione della triassialità dello stato di sforzo. Utilizzando un modello di danno non lineare è stato possibile ricavare una relazione semplice in cui i parametri possono essere agevolmente determinati in regime monoassiale di sforzo. La soluzione proposta è stata verificata con i dati sperimentali relativi a diversi acciai: in tutti i casi l'accordo è risultato essere molto buono soprattutto se messo a confronto con modelli analoghi.

BIBLIOGRAFIA

Bonora N., Gentile D. and Iacoviello F., 1996b, "Triaxiality and Ductile Rupture in Round Notch Tensile Bar" (in Italian) Proceedings of XII Italian Group of Fracture National Meeting, Parma.

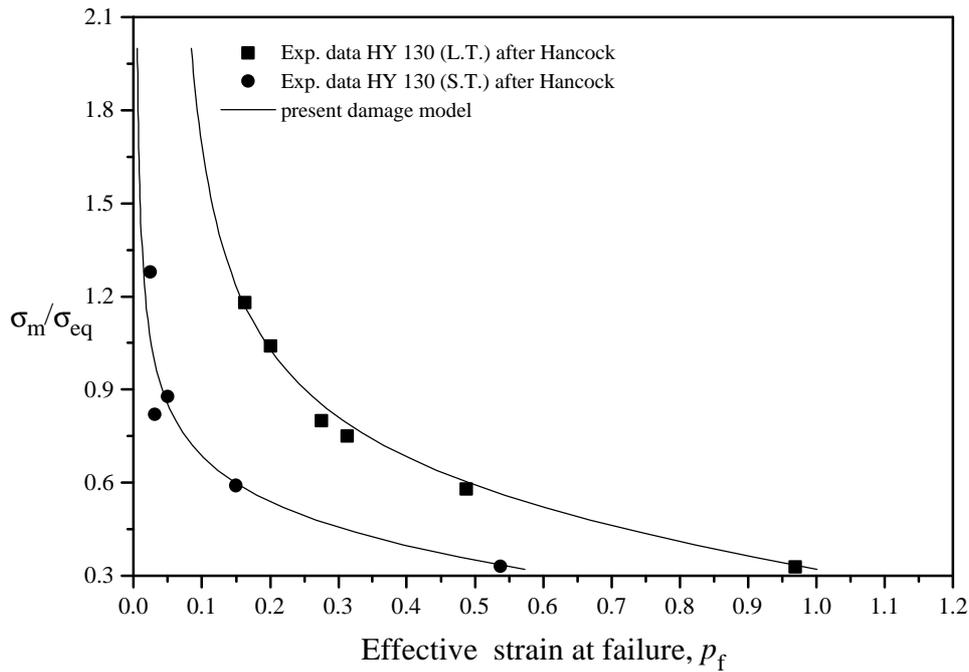


Fig. 5 - Andamento della duttilità in funzione del fattore di triassialità per un acciaio HY130 secondo le due direzioni LT e ST.

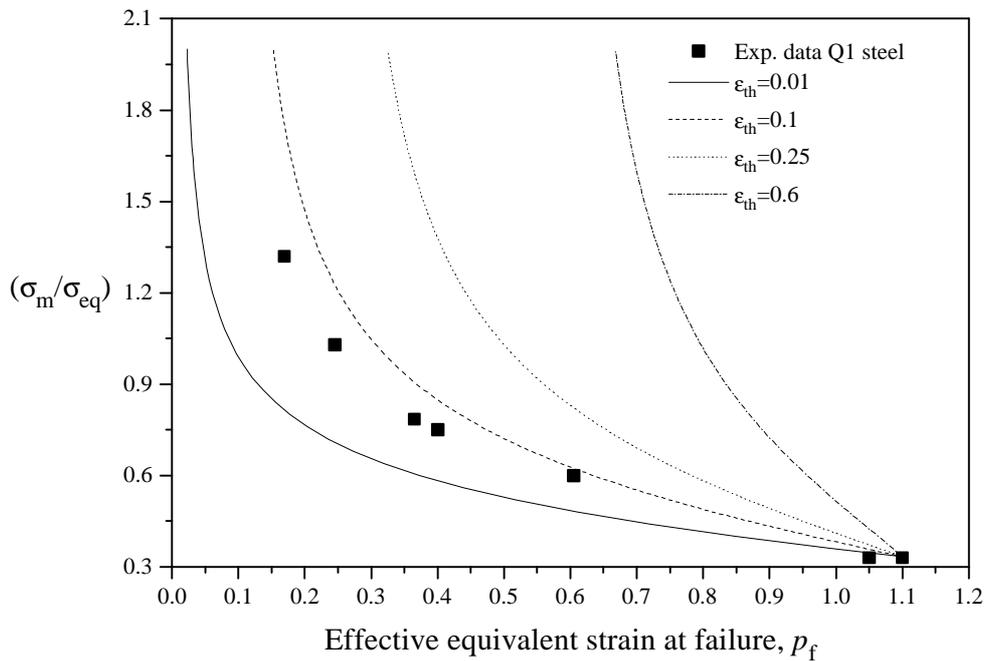


Fig. 6 - Effetto della deformazione di soglia sulla curva duttilità-triaxialità.

Bonora, N., 1997, "A Non-Linear CDM Model for Ductile Failure" to be published in Eng. Frac. Mechanics.

Bonora, N., Cavallini, M., Iacovello, F. and Marchetti, M., 1994 "Crack Initiation in Al-Li Alloy Using Continuum Damage Mechanics", in Localized Damage III Computer-Aided Assessment and Control, Ed. M.H.Aliabadi, A. Carpinteri, S. Kalisky and D.J. Cartwright, Computational Mechanics Publication, Southampton Boston, pp. 657-665.

- Bonora, N., Iacoviello F., and Salvini, P., 1996, "Experimental Identification of Damage Evolution Law in Al-Li 2091 Alloy", XXV AIAS National Meeting, Gallipoli, pp.345-355.
- Chandrakanth, S. and Pandey, P.C.,1993, "A New Ductile Damage Evolution Model", Int. J. Fract., Vol.60, R73-R76.
- Chow C.L. and Wang J., 1987, "An Anisotropic Theory of Continuum Damage Mechanics For Ductile Failure", Engn. Fract. Mech. Vol.27, n° 5, pp. 547-558.
- Earl J.C. and Brown D.K., 1976,"Distribution of Stress and Plastic Strain in Circumferentially Notched Tension Specimens", Engn. Fract. Mech., Vol. 8, pp. 599-611
- Hancock J.W. and Meckenzie A.C., 1976," On the Mechanisms of Ductile Failure in High Strength Steels Subjected to Multi-Axial Stress-States", J. Mech. Phys. Solids, Vol.24, pp. 147-169.
- Le Roy, G., Embury, J.D., Edward, G. and Ashby, M.F.,1981, " A Model of Ductile Fracture Based on the Nucleation and Growth of Voids", Acta Metallurgica, Vol. 29, pp.1509-1522.
- Lemaitre J., 1985 "A Continuos Damage Mechanics Model for Ductile Fracture", J. of Engn. Mat. and Tech., Vol. 107, pp. 83-89.
- Manjoine M.J., "Creep-Rupture Behaviour of Weldments",Weld. Research. Supplement, 1982, pp. 50s-57s
- McClintock F.A., 1968 " A Criterion for Ductile Fracture by the Growth of Holes", J. Appl. Mech., Vol. 35, pp. 363-371.
- Rice J.R. and Tracy D.M., " On Ductile Enlargement of Voids in Triaxial Stress Fields", J. Mech. Phys. Solids, Vol. 17, pp. 210-217, 1969.
- Shih, C.F., and Liu, X.H., 1995, "Validity in J-Resistance Curve Determination", NUREG/CR-6264 BMI-2181, Vol.1.
- Shih, C.F., Xia, L., and Hutchinson, J.W., 1995, "Validity in J-Resistance Curve Determination", NUREG/CR-6264 BMI-2181, Vol.2
- Thomson R.D. and Hancock J.W., 1984, "Ductile Failure by Void Nucleation, Growth and Coalescence", Int. J. Fract., Vol. 26, pp.99-112.