

**IGF12 - XII Convegno Nazionale  
Gruppo Italiano Frattura  
Parma, 12-13 giugno 1996**

**CALCOLO DEI SIF GENERALIZZATI IN INTAGLI ACUTI  
CON IL METODO DEGLI ELEMENTI DI CONTORNO**

*M. Ciavarella, G. Demelio, G. Monno*

Dipartimento di Progettazione e Produzione Industriale  
Politecnico di Bari  
Viale Japigia 182 - 70126 Bari

**PAROLE CHIAVE:** intagli acuti, elementi di contorno, fattori di intensificazione delle tensioni generalizzati

**SOMMARIO**

In questo lavoro è discussa una metodologia per la determinazione dei coefficienti dello sviluppo in autofunzioni di Williams per il campo tensionale in prossimità di intagli acuti, coefficienti che possono essere considerati fattori di intensificazione delle tensioni (SIF) generalizzati, tenendo ben presente che il concetto di intensificazione delle tensioni andrebbe riferito ai soli termini singolari.

Il metodo proposto utilizza i risultati di una analisi numerica con elementi di contorno, e in particolare le tensioni radiali lungo i bordi liberi dell'intaglio, sfruttando le proprietà delle autofunzioni di Williams.

La metodologia è stata applicata ad un caso di piastra intagliata considerato di riferimento in letteratura, riscontrando un ottimo accordo per i primi due termini singolari con discretizzazioni non particolarmente spinte.

E' stato studiato inoltre il caso di un disco criccato radialmente fino al suo centro, e per il quale è stato necessario integrare la tecnica con l'utilizzo delle tensioni circonferenziali sull'asse di simmetria all'interno del dominio. Stimando i primi cinque termini dello sviluppo, è possibile descrivere in modo approssimato l'intero stato tensionale.

## 1. INTRODUZIONE

Gli intagli influenzano fortemente la capacità portante degli elementi strutturali e sono sedi preferenziali di nucleazione di cricche. La formulazione del relativo problema elastico basata sull'ipotesi delle piccole deformazioni nel caso di intaglio acuto porta a soluzioni che possono presentare singolarità nello stato tensionale, secondo una idealizzazione del problema che non tiene conto dei fenomeni che nella realtà impediscono alle tensioni di assumere valori infiniti quali lo snervamento, le deformazioni finite ed altre non-linearità. Le soluzioni singolari risultano essere però operativamente utilizzabili in quanto, in presenza di snervamento localizzato, possono essere collegate ai fenomeni energetici che governano la propagazione critica o sub-critica di cricche.

Il primo studio sistematico delle singolarità in domini bidimensionali omogenei ed elastici con geometria angolare di estensione infinita è stato effettuato da Williams [1] prendendo spunto da studi sulle ali e su altre geometrie rientranti dei missili. Williams considera differenti condizioni al contorno omogenee lungo i bordi dell'intaglio (bordi liberi, bordi incastrati, un bordo libero e l'altro incastrato) e individua una espansione in autofunzioni dello stato tensionale. La dimostrazione della completezza della soluzione di Williams, nel senso di uniforme convergenza dell'espansione alla soluzione esatta, è stata fornita in [2] nel caso di geometria angolare con condizioni al contorno di bordo libero ed in [3] nel caso di settori circolari, anche caricati lungo i bordi dell'intaglio da forze distribuite descritte da funzioni appartenenti a  $C_\infty$  (infinitamente derivabili).

Attraverso tecniche numeriche e sperimentali [4, 5] si è mostrato come tale soluzione sia applicabile ad un'ampia casistica di tipologie di elementi di macchine, considerando la geometria locale dell'intaglio acuto ed il contributo di almeno due autofunzioni.

Il problema principale che sorge in tali analisi è la determinazione dei coefficienti moltiplicativi delle autofunzioni cui spesso si attribuisce la definizione di fattori di intensità degli sforzi (SIF) generalizzati, anche se tale definizione è rigorosa solo nel caso di autofunzioni singolari. A tal fine sono state proposte varie metodologie numeriche, tra cui metodi *boundary collocation* [6], metodi di estrapolazione ed elementi singolari con FEM [7], e metodi delle funzioni peso [8]. Più recentemente tecniche di estrazione connesse a FEM di tipo gerarchico [9], nonché implementazioni avanzate di BEM con tecniche di sottrazione della singolarità tensionale [10] hanno dato buoni risultati in termini di accuratezza e convergenza.

Programmi BEM standard permettono di raggiungere semplicemente per estrapolazione risultati altrettanto accurati con una adeguata verifica della convergenza. Per applicare questa metodologia, senz'altro più immediata, a intagli sollecitati in modo misto è necessario però ricorrere a elaborazioni interessanti i punti interni, con complicazioni operative e perdita di precisione quando i punti interni sono molto vicini al contorno. In questo lavoro la determinazione dei SIF generalizzati è effettuata utilizzando unicamente le tensioni radiali lungo i bordi calcolate con metodologie ormai standardizzate, e alcune proprietà delle autofunzioni dell'espansione di Williams.

## 2. ESPANSIONE DI WILLIAMS

Per completezza si riportano gli aspetti salienti della soluzione di Williams nel caso del dominio bidimensionale a geometria angolare avente bordi liberi mostrato in fig.1. La

funzione di Airy  $\Phi$  individuata da Williams, per un generico termine di autovalore  $\lambda$  dell'espansione, nel riferimento polare mostrato in figura 1, è espressa come prodotto di una funzione della sola variabile  $r$  per una funzione della sola variabile  $\theta$ :

$$\Phi = r^{\lambda+1} \cdot F(\theta; \lambda) \quad (1)$$

con:

$$F(\theta; \lambda) = C_1 \cos(\lambda + 1)\theta + C_2 \sin(\lambda + 1)\theta + C_3 \cos(\lambda - 1)\theta + C_4 \sin(\lambda - 1)\theta \quad (2)$$

dove i coefficienti  $C_i$  e  $\lambda$  sono costanti da determinare imponendo le condizioni al contorno. Le tensioni sono quindi espresse dalle relazioni:

$$\begin{cases} \sigma_{rr}(r, \theta) \\ \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) \\ \sigma_{r\theta}(r, \theta) \end{cases} = r^{\lambda-1} \begin{cases} (\lambda+1) \cdot F(\theta) + F''(\theta) \\ \lambda(\lambda+1) \cdot F(\theta) \\ -\lambda \cdot F'(\theta) \end{cases} \quad (3)$$

Imponendo le condizioni al contorno

$$\sigma_{\theta r} = \sigma_{\theta\theta} = 0; \quad \theta = \pm\alpha \quad (4)$$

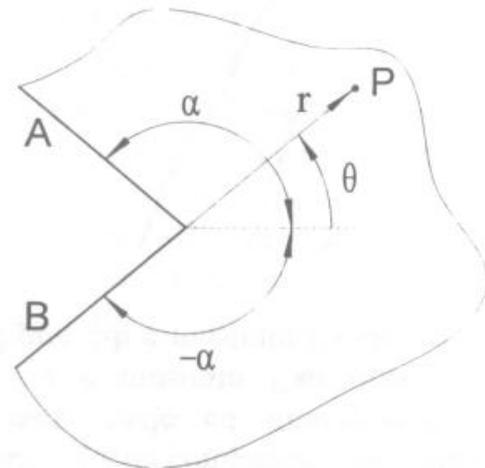


Figura 1 - Sistema di riferimento

si ottiene un sistema omogeneo di quattro equazioni nelle incognite  $C_i$ . Tali equazioni sono a coppie fra loro indipendenti indicando che esiste una separazione della soluzione in contributi di tipo simmetrico ed antisimmetrico, come naturale conseguenza della simmetria geometrica e delle condizioni al contorno. Per ciascuna delle coppie di equazioni considerate si ha una soluzione non banale imponendo che il relativo determinante si annulli. Tale condizione conduce a due equazioni caratteristiche che determinano gli autovalori; la prima, valida per le soluzioni simmetriche, è:

$$\lambda \cdot \sin(2\alpha) + \sin(2\lambda\alpha) = 0 \quad (5)$$

La seconda, per le soluzioni antisimmetriche, è:

$$\lambda \cdot \sin(2\alpha) - \sin(2\lambda\alpha) = 0 \quad (6)$$

Le equazioni caratteristiche hanno infinite soluzioni (autovalori) nel campo complesso. Imponendo che ciascuna soluzione tensionale abbia energia potenziale elastica finita, vengono escluse come soluzioni asintotiche quelle soluzioni il cui corrispondente autovalore ha parte reale negativa o nulla.

Le proprietà delle autofunzioni del campo tensionale possono essere sinteticamente individuate a seconda del corrispondente tipo di autovalore, in base al loro ordine:

Nel caso in cui in corrispondenza di  $\lambda=1$  si annulli la derivata dell'equazione caratteristica (1) o (2) rispetto a  $\lambda$  si ha:

$$\sigma = \begin{cases} O(r^{\lambda-1}) & \text{per valori reali di } \lambda \\ O(r^{\xi-1}) \begin{cases} \sin(\eta \cdot \ln r) \\ \cos(\eta \cdot \ln r) \end{cases} & \text{per valori complessi di } \lambda = \xi + i\eta \end{cases}$$

$$\sigma = \begin{cases} O(r^{\lambda-1} \ln r) & \text{per valori reali di } \lambda \\ O(r^{\xi-1} \ln r) \begin{cases} \sin(\eta \cdot \ln r) \\ \cos(\eta \cdot \ln r) \end{cases} & \text{per valori complessi di } \lambda = \xi + i\eta \end{cases}$$

La determinazione degli autovalori è effettuata numericamente. La mappatura completa degli autovalori non è agevole e alcuni lavori in letteratura si occupano segnatamente delle tecniche più adatte in presenza di soluzioni complesse [11]. In questo lavoro le soluzioni sono stati determinate utilizzando l'algoritmo n°365 della collezione ACM [12], che implementa il metodo *downhill*.

Le soluzioni reali note per  $\alpha=\pi$  e per  $\alpha=n/2$ , cioè per la configurazione rispettivamente di cricca e di semipiano, sono state utilizzate come autovalori di partenza per determinare tutte le soluzioni con incrementi o decrementi pari a  $1^\circ$ . E' stato necessario partire da ambedue i valori di  $\alpha$  per poter esplorare le soluzioni anche in corrispondenza dei valori di apertura dell'angolo per cui esse si biforcano. La figura 2 mostra l'andamento degli autovalori al variare dell'angolo  $\alpha$  da  $0$  a  $180^\circ$  (cricca). Per ogni angolo, nel semipiano delle ordinate positive sono riportate le parti reali degli autovalori, mentre nel semipiano delle ordinate negative è riportata la parte immaginaria considerata con segno negativo (vale ovviamente la complessa coniugata). La corrispondenza nel passaggio dalle soluzioni reali a quelle complesse è indicata dalla linea tratteggiata che permette di associare parte reale ed immaginaria delle corrispondenti soluzioni complesse. In figura 2-a è mostrato l'andamento degli autovalori per soluzioni simmetriche mentre in figura 2-b è mostrato l'andamento per soluzioni antisimmetriche.

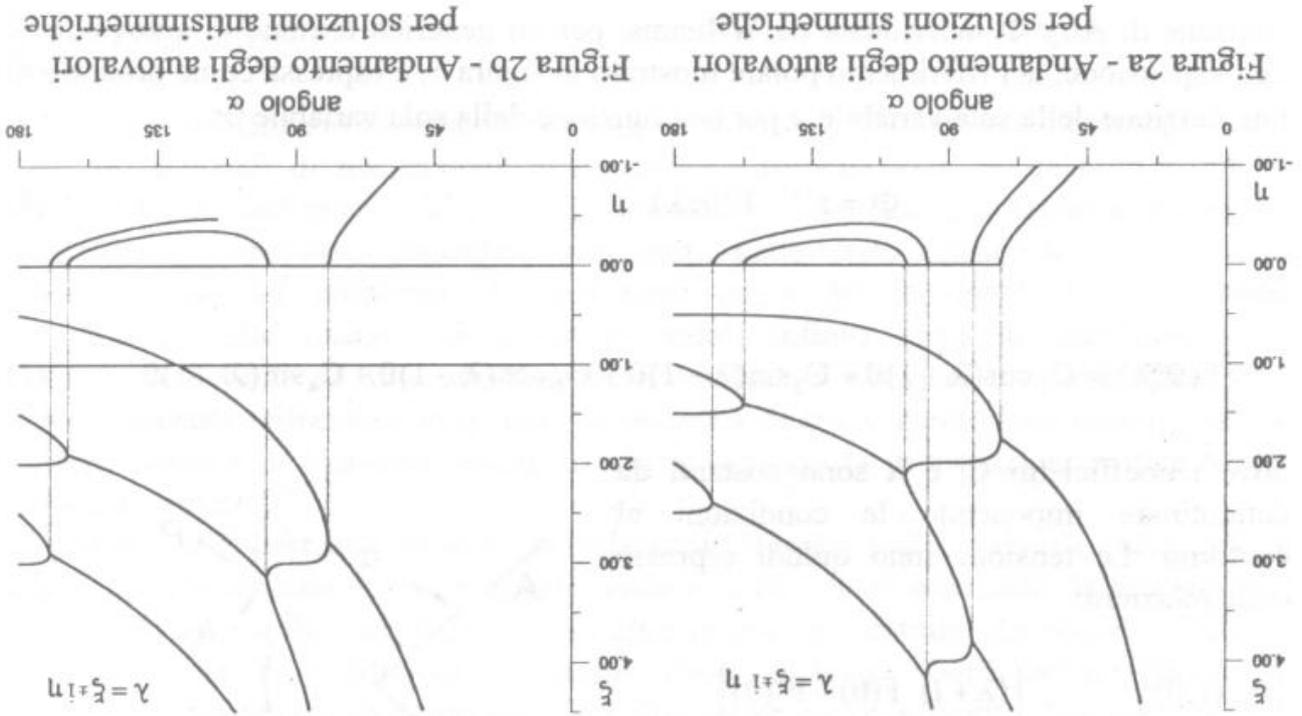


Figura 2a - Andamento degli autovalori per soluzioni simmetriche

Figura 2b - Andamento degli autovalori per soluzioni antisimmetriche

### 3. METODOLOGIA PROPOSTA

Se è possibile definire intorno all'intaglio acuto un settore con condizioni al contorno lungo i bordi appartenenti a  $C_\infty$ , l'espansione di Williams fornisce una soluzione completa dello stato tensionale nel settore medesimo.

Lungo i bordi dell'intaglio, le tensioni radiali possono essere espresse nella forma:

$$\sigma_{rr}^{(A)} = \frac{\sigma_{rr}^{(s)} + \sigma_{rr}^{(a)}}{2}; \quad \sigma_{rr}^{(B)} = \frac{\sigma_{rr}^{(s)} - \sigma_{rr}^{(a)}}{2} \quad (7)$$

dove  $\sigma_{rr}^{(A)}$  e  $\sigma_{rr}^{(B)}$  sono le tensioni radiali lungo i bordi rettilinei (A) e (B) dell'intaglio, mentre  $\sigma_{rr}^{(s)}$  e  $\sigma_{rr}^{(a)}$  rappresentano i contributi simmetrici ed antisimmetrici.

Nel caso le condizioni al contorno prescrivano bordi rettilinei scarichi, per simmetria di geometria e di condizioni al contorno tali contributi sono esplicitabili e separabili nell'espansione di Williams.

Definiamo allo scopo dei fattori di intensità degli sforzi (SIF) generalizzati secondo [10], tenendo conto che sulla bisettrice dell'intaglio la tensione circonferenziale risulta solo simmetrica mentre quella tangenziale risulta solo antisimmetrica. Pertanto si ha

$$\sigma_{\theta\theta}(r,0) = \sum \sigma_{\theta\theta}(r,0;\lambda_s) = \sum K_{\lambda_s} r^{\lambda_s-1} / \sqrt{2\pi} \quad (8a)$$

$$\sigma_{r\theta}(r,0) = \sum \sigma_{r\theta}(r,0;\lambda_a) = \sum K_{\lambda_a} r^{\lambda_a-1} / \sqrt{2\pi} \quad (8b)$$

dove si sono indicati con  $K_{\lambda_s}$  e  $K_{\lambda_a}$  i SIF generalizzati relativi ai corrispondenti autovalori  $\lambda_s$  e  $\lambda_a$  simmetrici ed antisimmetrici.

Analizzando le funzioni angolari delle tensioni, per ogni singola autofunzione simmetrica, si può verificare che il rapporto tra la tensione radiale sul bordo e la tensione circonferenziale sulla bisettrice è una costante  $R_{\lambda_s}$  che dipende unicamente da  $\alpha$  e  $\lambda_s$ . Analogamente, per ogni singola autofunzione antisimmetrica il rapporto tra la tensione radiale sul bordo e la tensione tangenziale sulla bisettrice è una costante  $R_{\lambda_a}$  che dipende esclusivamente da  $\alpha$  e  $\lambda_a$ . Utilizzando le relazioni (2) e (3), le espressioni di  $R_{\lambda_s}$  e  $R_{\lambda_a}$  possono essere esplicitate come segue:

$$\frac{1}{R_{\lambda_s}} = \frac{\sigma_{\theta\theta}(r,0;\lambda_s)}{\sigma_{rr}(r,0;\lambda_s)} = \frac{\lambda_s + 1}{4} \left[ \frac{1}{\cos(\lambda_s - 1)\alpha} - \frac{1}{\cos(\lambda_s + 1)\alpha} \right] \quad (9a)$$

$$\frac{1}{R_{\lambda_a}} = \frac{\sigma_{r\theta}(r,0;\lambda_a)}{\sigma_{rr}(r,0;\lambda_a)} = \frac{1}{4} \left[ \frac{\lambda_a + 1}{\sin(\lambda_a + 1)\alpha} - \frac{\lambda_a - 1}{\cos(\lambda_a - 1)\alpha} \right] \quad (9b)$$

L'andamento di  $R_{\lambda_s}$  e  $R_{\lambda_a}$ , per l'autovalore simmetrico e antisimmetrico dominanti, è mostrato in figura 3 in funzione del semiangolo dell'intaglio  $\alpha$  variabile da  $90^\circ$  (semipiano) a  $180^\circ$  (cricca)

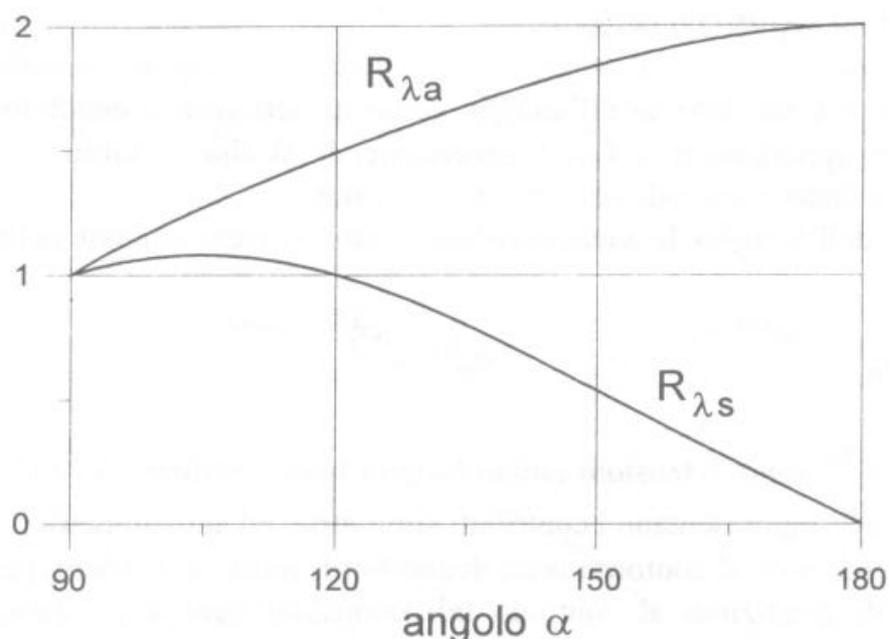


Figura 3 - Andamento dei rapporti  $R_{\lambda s}$  e  $R_{\lambda a}$  per gli autovalori simmetrici ed antisimmetrici dominantidominanti

Ritornando alle espressioni dei contributi simmetrici ed antisimmetrici delle tensioni radiali in (7) si può scrivere:

$$\sigma_{rr}^{(s)} = \sum R_{\lambda s} K_{\lambda s} r^{\lambda s - 1} / \sqrt{2\pi}; \quad \sigma_{rr}^{(a)} = \sum R_{\lambda a} K_{\lambda a} r^{\lambda a - 1} / \sqrt{2\pi} \quad (10)$$

Le espressioni (9) e (10) possono essere utilizzate per l'estrazione dei SIF generalizzati dalle componenti simmetriche ed antisimmetriche delle tensioni radiali. La separazione delle componenti simmetriche ed antisimmetriche presenta il vantaggio di scindere le autofunzioni con autovalori ravvicinati, al pari di quanto ottenibile utilizzando le tensioni sulla bisettrice, se queste fossero accurate quanto quelle sul contorno, condizione non facilmente ottenibile con il metodo degli elementi di contorno.

#### 4. APPLICAZIONE A UN CASO DI INTAGLIO E DISCUSSIONE

La tecnica descritta è stata applicata al caso illustrato in figura 4. Una piastra rettangolare con un profondo intaglio acuto con apertura pari a  $90^\circ$  è sollecitato da un sistema di forze autoequilibrato. La geometria del sistema presenta un asse di simmetria e l'insieme delle forze di superficie applicato è disaccoppiabile in un sistema di forze simmetrico ed in un sistema antisimmetrico. Le condizioni di simmetria locale sui bordi liberi dell'intaglio consentono di determinare separatamente e con precisione i fattori di intensità degli sforzi generalizzati relativi ai campi simmetrici ed antisimmetrici dominanti, ottenuto in letteratura con varie metodologie [7, 10].

Il sistema è stato risolto per mezzo di una analisi con elementi di contorno quadratici isoparametrici. Sono state realizzate varie discretizzazioni ottenute da una base (mesh 1) mostrata in figura 5, che è stata progressivamente infittita raddoppiando, triplicando e quadruplicando (mesh 2, 3, 4) il numero di elementi. E' stata quindi effettuata la separazione delle componenti simmetriche ed antisimmetriche delle tensioni radiali sul bordo e quindi una estrapolazione dei SIF corrispondenti agli autovalori dominanti che

sono stati confrontati con quelli di riferimento in letteratura, riportati in tabella 1, definendo i parametri Y come segue:

$$Y_{\lambda_{s_1}} = \frac{K_{\lambda_{s_1}}}{\sigma_{nom} \sqrt{\pi \cdot a^{1-\lambda_{s_1}}}} \quad Y_{\lambda_{a_1}} = \frac{K_{\lambda_{a_1}}}{\sigma_{nom} \sqrt{\pi \cdot a^{1-\lambda_{a_1}}}}$$

La differenza tra i risultati ottenuti con l'estrapolazione lineare ai minimi quadrati applicata senza particolari accorgimenti nella zona  $r/t \in [0, 0.2]$ , e quelli di riferimento è trascurabile facendo scendere il rapporto  $t_1/t$  al di sotto di 0.02, ossia triplicando l'infittimento mostrato in figura 5.

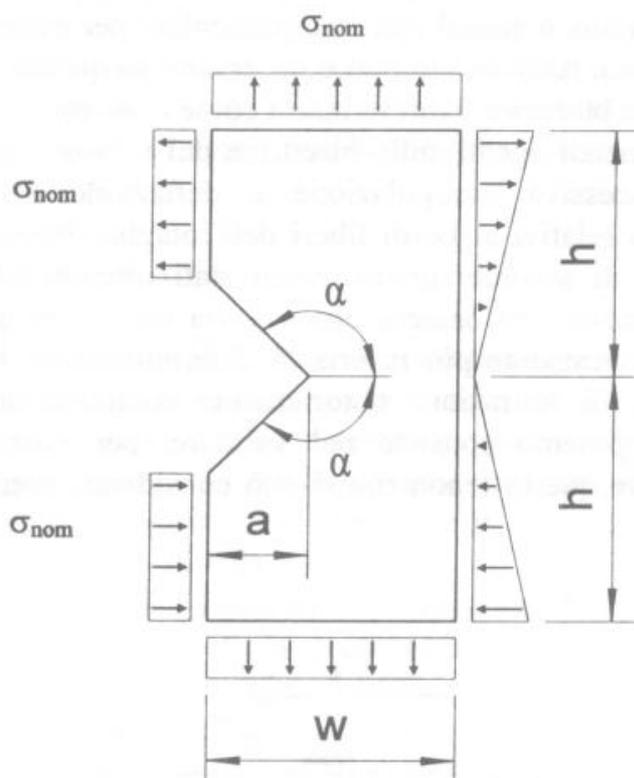


Figura 4 - Problema in modo misto ( $\alpha = 135^\circ$ ,  $w/a = 2.5$ ,  $w/h = 1$ )



Figura 5 - Discretizzazione di base utilizzata per l'analisi con elementi di contorno.

mesh	estrapolazione lineare		estrapolazione quadratica	
	$Y_{\lambda_{sI}}$	$Y_{\lambda_{aI}}$	$Y_{\lambda_{sI}}$	$Y_{\lambda_{aI}}$
1	2.737	0.152	4.121	0.152
2	2.527	0.156	2.979	0.153
3	2.489	0.151	2.463	0.150
4	2.484	0.150	2.472	0.149

Tab. 1 - Valori dei SIF generalizzati dominanti nel problema di figura 4 (il valore riportato in ref.[10] è  $Y_{\lambda_{sI}}=2.473$ ,  $Y_{\lambda_{aI}}=0.151$ )

## 5. APPLICAZIONE A UN CASO DI CRICCA E DISCUSSIONE

E' evidente che l'applicazione della tecnica al caso  $\alpha = \pi$ , ossia alla cricca, non consente di ottenere il fattore di intensità degli sforzi relativo al modo I e ciò perchè le tensioni radiali relative ai modi simmetrici con autovalori non interi (0.5, 1.5, 2.5, ...) sono

invariabilmente nulle con conseguente annullamento del rapporto  $R_{\lambda_s}$ . E' da notare però che per gli autovalori interi (1, 2, 3, ...) l'espansione di Williams della componente simmetrica delle tensioni radiali sui bordi liberi è regolare e si riduce ad un polinomio. Come esempio si considera un disco di raggio unitario soggetto a trazione idrostatica con cricca radiale fino al suo centro. La determinazione dello stato tensionale è effettuata per mezzo di una analisi agli elementi di contorno effettuando una discretizzazione di metà struttura sfruttando la simmetria geometrica e di carico.

Per poter determinare le autofunzioni relative ai modi simmetrici con autovalori non interi (0.5, 1.5, 2.5, ...) è stato necessario applicare la tecnica proposta interessando anche le tensioni circonferenziali sull'asse di simmetria. Questo in generale comporta la necessità di introdurre punti interni al dominio, e quindi una cura particolare per evitare errori avvicinandosi al bordo. In questo caso, tuttavia, ciò non è necessario in quanto la discretizzazione è di metà disco, e quindi la bisettrice è discretizzata come contorno.

I risultati relativi alle tensioni circonferenziali agenti sulla bisettrice del settore sono stati analizzati con la tecnica di successiva estrapolazione e deflazione delle autofunzioni via via dominanti. I risultati relativi ai bordi liberi dell'intaglio, invece, sono stati interpolati con un polinomio di secondo grado. Sono stati ottenuti SIF generalizzati per le prime cinque autofunzioni. Si osserva che via via che si spinge l'ordine delle autofunzioni, diventa numericamente più incerta la determinazione dei SIF generalizzati, in quanto l'operazione di sottrazione notoriamente comporta una perdita di cifre significative. Un accorgimento consiste nel valutare, per quanto possibile, i termini successivi in zone dove questo fenomeno si può considerare meno influente.

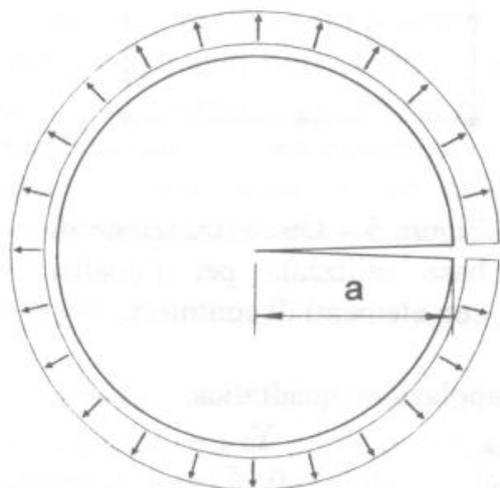


Figura 6 - Problema del settore circolare caricato da trazione idrostatica  $\sigma_0$

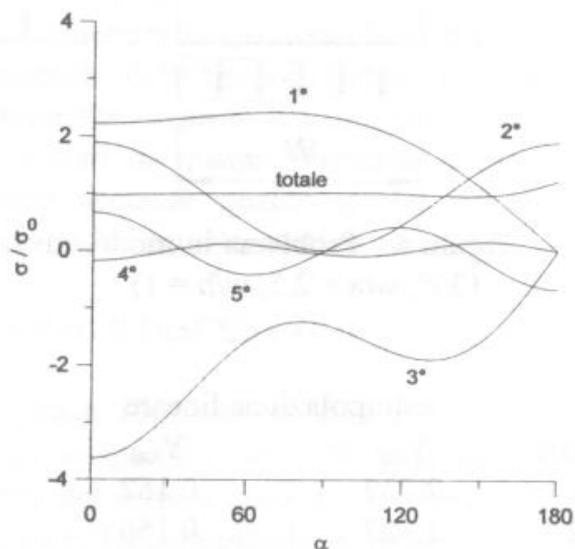


Figura 7 - Andamento delle prime 5 autofunzioni e della loro somma per il problema di figura 6

In figura 7 è riportato l'andamento delle tensioni radiali per le prime 5 autofunzioni determinate, lungo il contorno del disco, insieme all'andamento della somma di tali autofunzioni, da confrontare con il carico unitario radiale applicato. Osservando che si è assunto come termine di confronto una grandezza sul bordo, ossia sul punto più distante dalla singolarità, e nonostante le ampiezza di oscillazione dei termini dello sviluppo, si

può concludere che la metodologia proposta è efficace nel fornire una legge analitica per l'intero stato tensionale.

## CONCLUSIONI

La metodologia presentata consente una valutazione dei SIF generalizzati per strutture piane con intaglio acuto, basata sulla elaborazione di risultati di analisi ad elementi di contorno delle tensioni radiali sui bordi liberi dell'intaglio. I risultati ottenuti mostrano un ottimo accordo con valori di SIF generalizzati dominanti di un caso di intaglio sollecitato in modo misto riportato in letteratura, conseguito con limitato sforzo di calcolo. Si è studiato inoltre il caso di un disco criccato radialmente, ottenendo una stima dei primi 5 termini dello sviluppo, e paragonando la somma dei termini di tensione radiale al valore costante prescritto come condizione al contorno, si è trovato che tale sviluppo costituisce una buona descrizione analitica dell'intero campo tensionale.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Williams M.L. "Surface stress singularities from various boundary conditions in angular corner of plates in extension", *J. of Appl. Mech.*, 74, 523-28, 1952.
- [2] Gregory R D, "Greens functions, bi-linear forms, and completeness of the eigenfunctions for the elastostatic strip and wedge", *J.of Elasticity*, 9, (1979), 283-309.
- [3] Tsamasphyros G, Theocaris P S, "On the solution of the sector problem", *J.of Elasticity*, 9, (1979), 271-281,.
- [4] Atzori B., Demelio G., Pappalettere C., "Effetto di sollecitazioni composte sullo stato di tensione in prossimità di singolarità", su atti del Convegno del Dip.di Meccanica, Politecnico di Milano, 7 Giugno 1990, pp.163-179.
- [5] Demelio G., Pappalettere C., "Stress field near sharp notches", *Journal of Materials Processing Technology*, 32 (1992), pp.155-160.
- [6] Gross B, Mendelson A, "Plane elastostatic analysis of V-notched plates", *Int.J.Fract.Mech.*, 8, 267-276, (1972).
- [7] Lin KY, Tong PT, "Singular finite element for the fracture analysis of V-notched plates", *Int. j.numer.methods eng.*, 15, 1343,1354, (1980)
- [8] Sham TL, Bueckner HF, "The weight-Function theory for piecewise homogeneous isotropic notches in antiplane strain", *J.Appl.Mech, ASME*, 55, 596-603, (1988).
- [9] Szabò A, Babuska I, "Computation of the amplitude of stress singular terms for cracks and reentrant corners", in T.A.Cruse (ed.), *Fracture Mechanics: Nineteenth Symposium, ASTM STP 969, American Society for testing and Materials*, 1988, 101-124.
- [10] Portela A, Aliabadi MH, "Efficient boundary element analysis of sharp notched plates", *Int.J.Num.Meth.Eng.*, 32, 445-470, (1991).
- [11] Rosel R, "On the wedge/notch eigenvalues", *Int.J.of Fracture*, 33, 61-71, (1987).
- [12] Algorithm 365 "Complex Root Finding", *Collected Algorithm from CACM*.