

**IGF 12 - XII Convegno Nazionale
Gruppo Italiano Frattura
Parma, 12-13 Giugno 1996**

FRATTURA HERTZIANA DI PIASTRE DI SPESSORE SOTTILE

M. Ciavarella, G. Demelio, G. Monno

Dipartimento di Progettazione e Produzione Industriale - Politecnico di Bari
Viale Japigia, 182 - 70126 BARI - ITALY

PAROLE CHIAVE: contatto hertziano, rivestimenti sottili, test di indentazione.

Sommario

Viene studiato con il metodo degli elementi di contorno il problema assialsimmetrico dello stato tensionale in una piastra di spessore sottile su supporto rigido, in contatto con una sfera elastica, ovvero di una piastra compressa tra due sfere uguali. Sono discusse con particolare riguardo le variazioni delle tensioni di trazione, nell'ottica della caratterizzazione della frattura per indentazione di piastre in materiale fragile. Al diminuire del rapporto tra spessore della piastra e dimensione dell'area di contatto aumentano le tensioni radiali superficiali di trazione e, in misura maggiore, le tensioni radiali e circonferenziali di trazione al di sotto dell'area di contatto. Tale circostanza giustifica la modalità di frattura a sviluppo radiale riscontrata sperimentalmente in piastre sottili. L'analisi svolta può interessare diverse applicazioni ingegneristiche, quali i rivestimenti anti-usura o come barriere termiche, e fornisce una stima dell'errore ottenibile approssimando la piastra al semispazio elastico nell'interpretazione di test di indentazione su componenti sottili.

Nomenclatura

r, θ, z	coordinate cilindriche con origine nel punto di contatto iniziale
x, y	coordinate cartesiane ortogonali
a	raggio dell'area di contatto; caso reale
a_∞	raggio dell'area di contatto hertziano, cioè per piastra di spessore infinito
R	raggio sfera
E, ν	modulo di elasticità di Young, coefficiente di Poisson
h, W	spessore, e larghezza della piastra
P	carico di compressione
$p(r)$	pressione di contatto

p_{∞}	pressione di contatto massima nel caso hertziano
p_{max}, p_{med}	pressione di contatto massima, o media nel caso reale
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	tensioni principali massima e minima nel piano, circonferenziale
$\sigma_r, \sigma_{\theta}, \sigma_z$	componenti di tensione nel riferimento cilindrico
$\sigma_{rmax},$	
$\sigma_{\theta max}, \sigma_{z max}$	valori massimi delle componenti di tensione
$\sigma_{r\infty}, \sigma_{\theta\infty}, \sigma_{z\infty}$	valori massimi delle componenti di tensione nel caso hertziano
Γ	contorno del dominio
u, t	vettori spostamento e tensione
U, T	funzioni nucleo per gli spostamenti e le tensioni

1. Introduzione

L'indentazione di materiali fragili costituisce da un lato un valido metodo semi-distruttivo per misurare le proprietà di difettosità superficiale dei materiali fragili [1], e dall'altro, un modo per caratterizzare la resistenza alle condizioni di contatto-impatto [2]. Le applicazioni dei materiali ceramici come rivestimenti anti-usura o come barriere termiche sono ad esempio fortemente limitate dalla bassa tenacità e resistenza ai carichi di contatto-impatto. E' molto sentita, pertanto, l'esigenza di caratterizzare la frattura di strati sottili applicati su materiali aventi caratteristiche termo-elastiche in generale differenti. L'indentazione di uno strato sottile è anche un metodo recentemente proposto per misurare qualitativamente l'adesione dei rivestimenti e una serie di studi di simulazione, in genere agli elementi finiti, di indentazione su rivestimenti in varie condizioni sono apparse nella letteratura scientifica [3,4,5].

I primi esperimenti sulla frattura di materiali fragili in condizioni di contatto normale furono condotti da Hertz [6] e Auerbach [7] su vetri caricati con piccole sfere d'acciaio. Si osservò che il carico critico per produrre il cono di frattura era, in una vasta gamma di casi, direttamente proporzionale al raggio della sfera, nonostante che il massimo della tensione di trazione al bordo dell'area di contatto sia proporzionale al quadrato del raggio. In prima istanza il fenomeno fu spiegato sulla base della maggiore probabilità di trovare un difetto critico in un'area di dimensioni maggiori [8]. Più recentemente Lawn [9,10] e Mouginot et al. [11] hanno dato un inquadramento teorico del problema nell'ambito della teoria della meccanica della frattura lineare elastica e la conferma della dipendenza lineare nel caso delle superfici abrase, dove al contrario le ipotesi probabilistiche indicherebbero l'esistenza della dipendenza quadratica. In base a quanto determinato da Lawn e Mouginot, al raggiungimento delle condizioni critiche si ha lo sviluppo di una superficie conica di frattura nella zona ad elevata tensione radiale, appena oltre il bordo di contatto, ed un successivo arresto della frattura per un'estensione che dipende dalle dimensioni iniziali dei difetti superficiali. Inoltre, ad una fase di propagazione instabile succede una fase stabile in cui la dimensione del cono di frattura è funzione del solo carico applicato.

Per strati elastici di lunghezza indefinita (nella letteratura anglosassone "strip" nel caso 2D e "slab" nel caso 3D) Sneddon [12] ha espresso gli spostamenti dovuti a carichi qualsiasi in termini di integrali di Fourier. Molti autori in seguito hanno affrontato vari problemi di contatto con la tecnica delle trasformate di Fourier, e in particolare:

Barovich et al. [13] il problema per uno strato elastico su substrato di proprietà elastiche differenti, caricato da una distribuzione ellittica di pressioni ; Conway et al. [14], utilizzando una discretizzazione delle pressioni di contatto in elementi costanti ; Bentall et al. [15] e poi Nowell et al. [16,17] utilizzando una particolare discretizzazione ad elementi triangolari che si sovrappongono per ottenere distribuzioni lineari a tratti, relativamente al solo caso 2D. Jaffar [18] ha affrontato il caso del contatto senza attrito tra una sfera rigida e una strato sottile incollato o meno a una fondazione rigida impostando equazioni integrali di Fredholm. Per una piastra compressa tra due sfere, Tu [20,21] imposta il problema della determinazione delle pressioni di contatto in termini di equazioni integrali. Matthewson [22] studia il caso di piastra caricata da una sfera rigida, fornendo un metodo approssimato per calcolare le tensioni medie nello spessore della strato elastica.

Si rileva che, per quanto a conoscenza degli autori del presente studio, non esistono studi sistematici sulle distribuzioni di tensioni interne, di fondamentale importanza nello studio dei meccanismi di rottura in tali condizioni.

Pertanto, gli autori hanno ritenuto di intraprendere lo studio completo dello stato tensionale in un problema di contatto di una piastra su supporto rigido senza attrito caricata da una sfera, al variare del rapporto a/h tra raggio dell'area di contatto e spessore della piastra, secondo lo schema riportato in Fig.1.

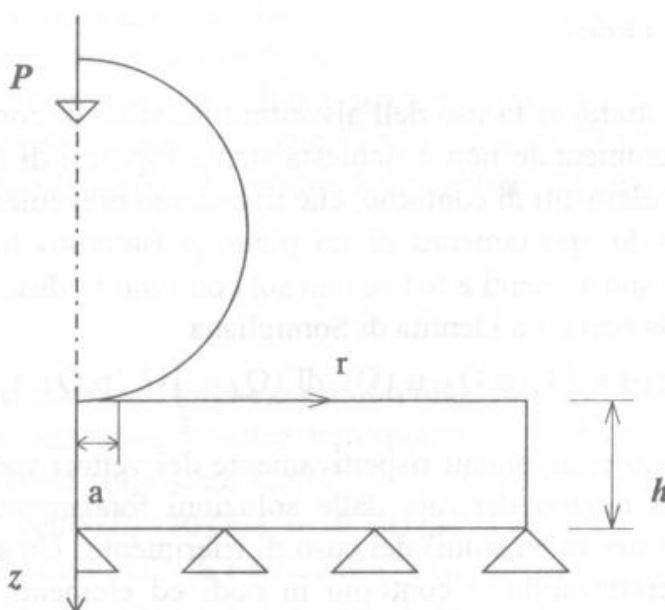


Fig. 1 - Geometria e sistema di riferimento per il problema in esame

Si riportano per completezza alcune formule per il caso hertziano, per dettagli si veda ad esempio il testo di Hills [23] . Se definiamo a_{∞} il valore hertziano del raggio di contatto tra una sfera di raggio R e il semispazio elastico sotto un carico P (i pedici "1" e "2" si riferiscono a sfera e semispazio, rispettivamente)

$$a_{\infty} = \left(\frac{3PR}{4E^*} \right)^{1/3}$$

con
$$E^* = \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right)^{-1} \quad (1)$$

la pressione all'interno dell'orma di contatto vale nel caso hertziano

$$p(r) = p_\infty (a^2 - r^2)^{1/2} / a$$

ove

$$p_\infty = \frac{3P}{2\pi a^2} \quad (2)$$

Lo stato tensionale superficiale complessivo è descritto da:

- all'interno dell'area di contatto

$$\begin{aligned} \sigma_r / p_\infty &= \frac{1 - 2\nu}{3} (a^2/r^2) \cdot \{1 - (1 - r^2/a^2)^{3/2}\} - (1 - r^2/a^2)^{1/2} \\ \sigma_\theta / p_\infty &= -\frac{1 - 2\nu}{3} (a^2/r^2) \cdot \{1 - (1 - r^2/a^2)^{3/2}\} - 2\nu(1 - r^2/a^2)^{1/2} \\ \sigma_z / p_\infty &= - (1 - r^2/a^2)^{1/2} \end{aligned} \quad (3)$$

- all'esterno dell'orma di contatto

$$\frac{\sigma_r}{p_\infty} = \frac{(1 - 2\nu) a^2}{3 r^2} = -\sigma_\theta / p_\infty \quad ; \quad \sigma_z = 0 \quad (4)$$

2. Metodo di analisi

Nel presente studio si fa uso dell'algoritmo iterativo di contatto di A.A.Becker [24] (la procedura incrementale non è richiesta stante l'ipotesi di assenza di attrito) basato sul metodo degli elementi di contorno, che riportiamo brevemente.

Il legame tra lo spostamento di un punto p (interno) di applicazione di un carico unitario, e gli spostamenti e le tensioni sul contorno Γ , descritto dal generico punto Q , è costituito dalla ben nota identità di Somigliana

$$u_i(p) + \int_{\Gamma} T_{ij}(p, Q) \cdot u_j(Q) \cdot d\Gamma(Q) = \int_{\Gamma} U_{ij}(p, Q) \cdot t_j(Q) \cdot d\Gamma(Q) \quad (5)$$

dove u e t sono componenti rispettivamente dei vettori spostamento e tensione; U e T sono funzioni nucleo derivate dalle soluzioni fondamentali (rispettivamente per gli spostamenti e per le tensioni) del caso di riferimento. Un set di equazioni algebriche è costruito discretizzando il contorno in nodi ed elementi con opportuna funzione di forma, prendendo ogni nodo del contorno come "sorgente" p e affrontando numericamente l'integrazione con le formule standard di Gauss, pervenendo a

$$[A] \cdot [u] = [B] \cdot [t] \quad (6)$$

In un problema misto convenzionale, per avere un'unica soluzione, devono essere applicate le corrette condizioni al contorno, per cui portando le variabili al primo membro e i termini noti al secondo si ottiene un sistema del tipo

$$[C] \cdot [x] = [d] \quad (7)$$

in cui nel vettore incognito $[x]$, cosiccome nel termine noto $[d]$, compaiono termini sia di tensione che di spostamento. In un problema di contatto, invece, ognuno dei due domini a contatto (indicati con gli apici 1 e 2) viene trattato separatamente per formare

le matrici [A] e [B], che sono successivamente rielaborate per soddisfare le condizioni di compatibilità al contatto, ovvero

$$(adesione) \quad \begin{cases} x^{(1)} + u_x^{(1)} = x^{(2)} + u_x^{(2)} \\ y^{(1)} + u_y^{(1)} = y^{(2)} + u_y^{(2)} \\ t_x^{(1)} = -t_x^{(2)} \\ t_y^{(1)} = -t_y^{(2)} \end{cases} \quad (8a)$$

$$(slittamento) \quad \begin{cases} t_t^{(1)} = \pm \mu \cdot t_n^{(1)} \\ t_n^{(2)} = -t_n^{(1)} \\ t_t^{(2)} = -t_t^{(1)} \\ u_n^{(1)} = u_n^{(2)} \\ u_t^{(1)} = u_t^{(2)} + \delta_t \end{cases} \quad (8b)$$

ove n e t sono le direzioni normale e tangenziale, rispettivamente, δ_t è lo slittamento relativo tra due nodi in direzione tangenziale, μ è il coefficiente d'attrito. Il numero di equazioni rimane uguale a quello delle incognite, permettendo così un'unica soluzione. Questo non vuol dire però che si tratti della soluzione del problema, in quanto devono essere soddisfatti alcuni controlli, ovvero

- che non vi sia compenetrazione al difuori dell'area di contatto
- che non vengano trasmesse trazioni dal contatto
- che non sia violata la legge dell'attrito coulombiano.

Il processo iterativo continua finché tali controlli non vengono superati, con il vantaggio che le matrici [A] e [B] di ogni dominio non cambiano, e quindi l'integrazione, che com'è noto è una parte particolarmente dispendiosa dell'intero processo di calcolo, viene eseguita solo 1 volta.

3. Modelli numerici e risultati

Il caso studiato è quello di una piastra di larghezza molto maggiore dell'area di contatto ($a_\infty/W=1/20$) in contatto con una sfera elastica nell'ipotesi di piccole deformazioni ($a_\infty/R=1/12$). Le costanti elastiche sono state scelte pari a quelle dell'acciaio ($E_1=210$ Gpa, $\nu_1=0.3$) per la sfera e del vetro ($E_2=70$ Gpa, $\nu_2=0.22$) per la piastra.

E' stato predisposto dapprima un modello di riferimento (cioè hertziano) con $a_\infty/h=1/20$, per poter confrontare la soluzione numerica con quella analitica, e quindi tarare la discretizzazione dei modelli in modo da avere risultati sufficientemente accurati.

Poichè per le pressioni di contatto non è particolarmente difficile ottenere un ottimo accordo con la teoria, si è tarato il modello sulla base della tensione radiale superficiale al di fuori dell'area di contatto. In fig.2 è riportato l'accordo ottenuto con una discretizzazione della piastra (caricata con le pressioni hertziane) di 81 elementi quadratici. Il risultato ottenuto è eccellente eccezion fatta per il picco di tensione radiale nella zona immediatamente al di fuori dell'area di contatto, ove d'altronde, Nowell e Hills [17] utilizzando le trasformate di Fourier riportano la comparsa del fenomeno di Gibbs, ossia l'insorgenza di un salto nella soluzione numerica. In ogni caso, eseguendo

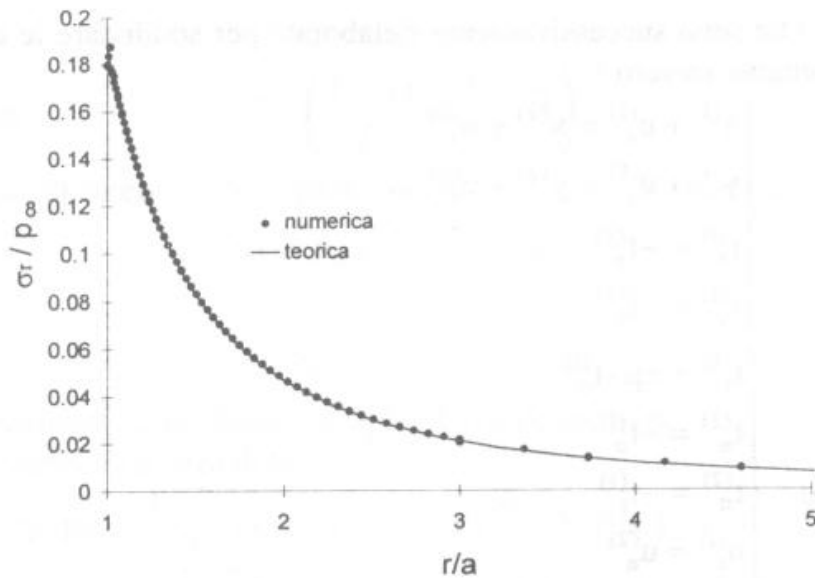
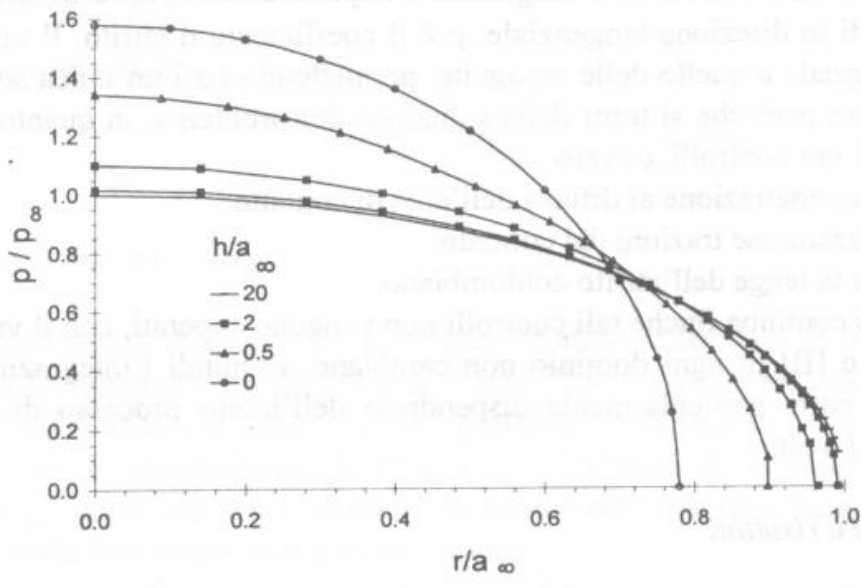
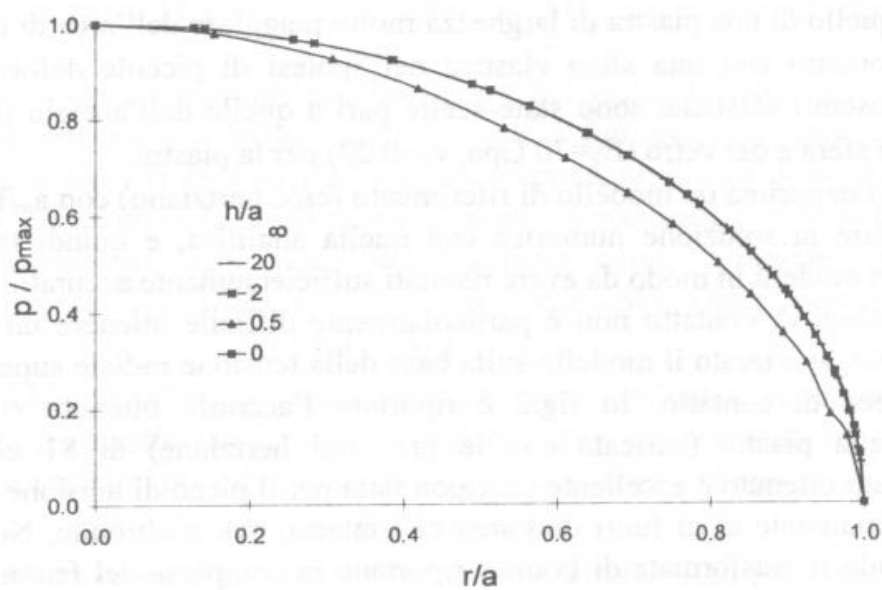


Fig.2 - Soluzione numerica per piastra spessa ($a_\infty/h=1/20$): tensione radiale superficiale. ($a_\infty/R=1/12$; $E_1=210$ GPa, $E_2=70$ GPa; $\nu_1=0.3$, $\nu_2=0.22$)



(A)



(B)

Fig.3 - Pressioni di contatto: (A) rispetto al caso sfera-semipiano; (B) rispetto ai valori attuali. ($a_\infty/R=1/12$; $E_1=210$ GPa, $E_2=70$ GPa; $\nu_1=0.3$, $\nu_2=0.22$)

un'estrapolazione ai minimi quadrati con una funzione $1/r^2$, si ottiene una stima sufficientemente accurata di tale picco di tensione.

Successivamente si sono studiati i casi di piastra via via più sottile $a_\infty/h=1/5, 1/2, 1, 2, 4, \infty$. Si noti che il caso limite $a_\infty/h=\infty$ corrisponde al contatto sfera-sfera.

Nelle fig.3 è mostrata la variazione della distribuzione di pressione in tali casi, rapportando la scala delle ascisse una volta ai valori hertziani di riferimento (A), e una volta ai valori attuali caso per caso (B). Dalla prima, si ha modo di osservare la variazione dei massimi della pressione e dell'area di contatto, dalla seconda la non-ellitticità della distribuzione delle pressioni nei casi di spessori molto sottili.

La variazione della pressione massima e dell'area di contatto al variare dello spessore della piastra è mostrata in fig.4 per il caso in esame, insieme alla variazione del massimo della σ_1 . Per tale grandezza, si ha un incremento massimo rispetto al caso hertziano di circa l'83%, in corrispondenza di $h/a_\infty \cong 0.5$, per poi avere l'altro valore hertziano, corrispondente al contatto sfera-sfera di stesse proprietà elastiche. Da notare ancora che, per una piastra "moderatamente sottile" ($h/a_\infty \cong 2$) le pressioni di contatto sono praticamente pari a quelle hertziane, il valore del massimo della σ_1 è invece già significativamente diverso, ovvero pari a circa 30% in più dell'hertziano.

3.1 Stato tensionale interno - modi di frattura

E' noto che, per piastra spessa, la frattura si localizza in prossimità dell'area di contatto, a partire dalla superficie per poi allargarsi e formare il "cono hertziano". Si è ritenuto pertanto discutere il caso di "moderatamente sottile" ($h/a_\infty \cong 2$), per valutare l'effetto di una distribuzione ellittica (hertziana) di pressioni sulla piastra sottile.

In fig.5 è rappresentato l'andamento della tensione radiale σ_r in superficie al di fuori dell'area di contatto (rapportata al valore massimo hertziano) per vari casi di spessore della piastra. Si noti il notevole incremento del picco di trazione, cui corrisponde però una riduzione dell'estensione della zona in trazione. Esiste inoltre un punto in cui la tensione radiale scende al di sotto della curva relativa alla piastra spessa, e tale punto si avvicina al bordo del contatto al diminuire dello spessore della piastra. Per una piastra "moderatamente sottile" tale punto è però ancora piuttosto distante dall'area di contatto (ad $r/a \cong 3$), per cui si può asserire che la tensione radiale è praticamente sempre superiore al caso hertziano, mentre per $h/a_\infty \cong 0.5$ si ha l'inversione già ad $r/a \cong 1.3$.

Le figg.6 e 7 mostrano come le tensioni radiali per una piastra "moderatamente sottile" variano nell'area immediatamente al di sotto della superficie. Dai diagrammi isotensione poi (fig.8) risulta che nella piastra sottile, ad una certa profondità (per valori di $z/a > 1.5$ e di $1.5 < r/a < 2.5$), si ha un cambiamento di segno, ossia si passa alla compressione, mentre nel caso hertziano la tensione principale massima continua a scendere senza invertirsi di segno. Tale zona di compressione, ovviamente, tende ad ostacolare la propagazione del cono di frattura nelle piastre sottili.

In condizioni quasi-statiche e in presenza di difetti distribuiti in modo statisticamente uniforme, a maggior ragione in presenza di difetti di maggiori dimensioni in superficie, diventa critico per primo un difetto in superficie in prossimità del bordo di contatto, essendo immerso nel campo radiale di trazione, che attiva il modo tipico di frattura conica. Per attivare invece altri modi di frattura, per esempio quello dovuto alla presenza di tensioni circonferenziali al disotto della zona di contatto (che hanno nel caso

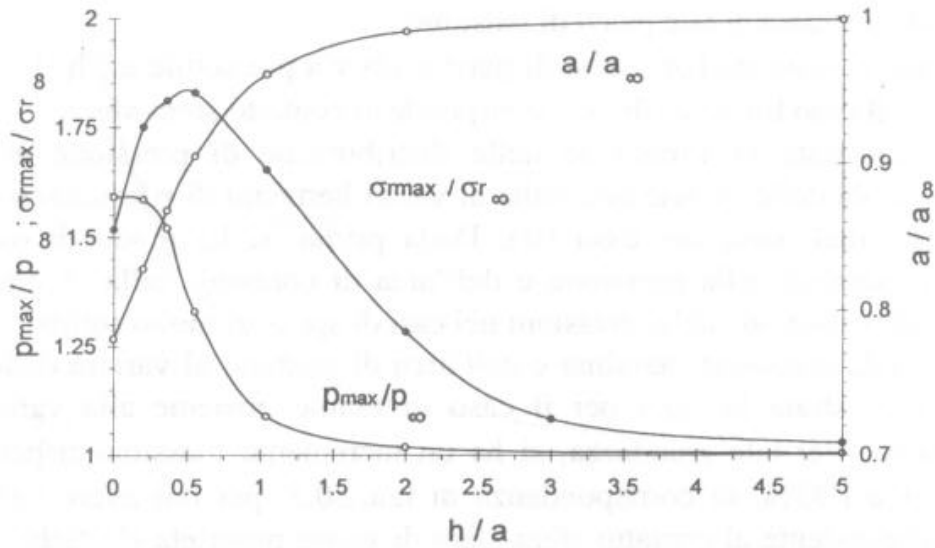


Fig.4 - Pressione massima, dimensione dell'area di contatto, e massimo della tensione radiale al variare dello spessore della piastra. ($a_\infty/R=1/12$; $E_1=210$ GPa, $E_2=70$ GPa; $\nu_1=0.3$, $\nu_2=0.22$)

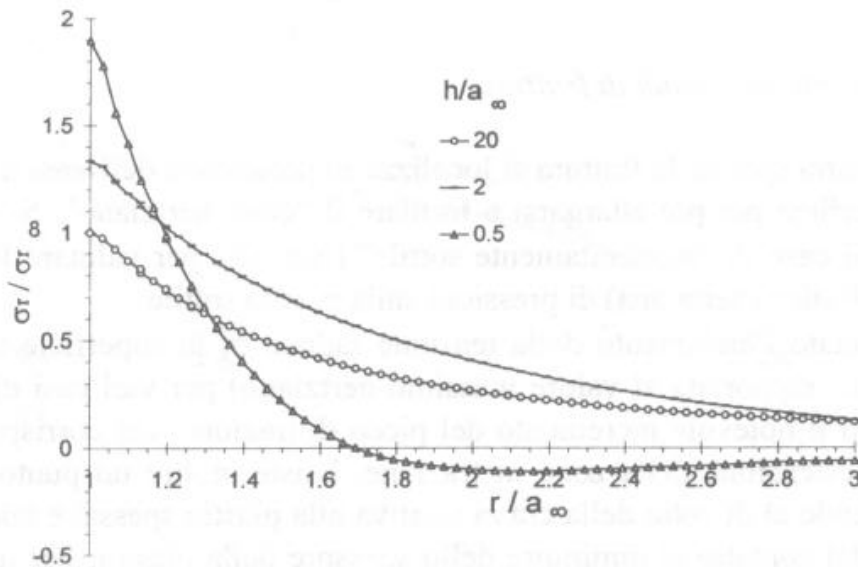


Fig.5 - Andamento della tensione radiale superficiale, al variare dello spessore della piastra. ($a_\infty/R=1/12$; $E_1=210$ GPa, $E_2=70$ GPa; $\nu_1=0.3$, $\nu_2=0.22$)

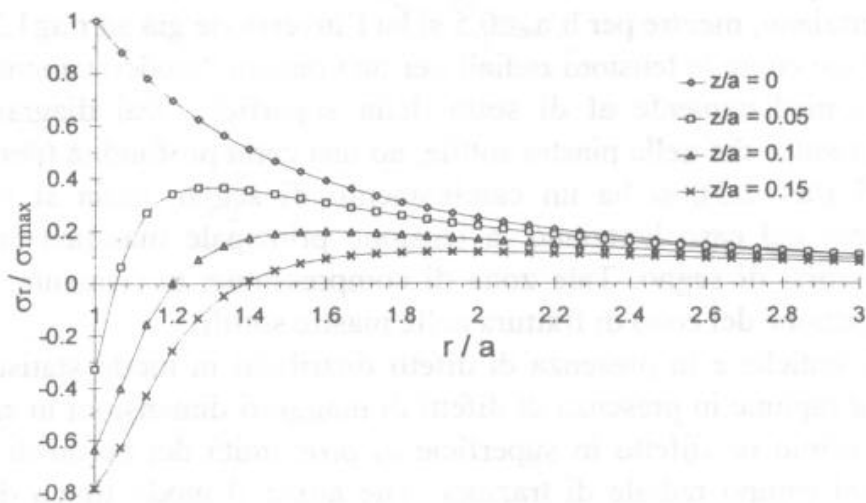


Fig.6 - Tensione radiale al disotto della superficie: piastra spessa ($a_\infty/h=1/20$); ($a_\infty/R=1/12$; $E_1=210$ GPa, $E_2=70$ GPa; $\nu_1=0.3$, $\nu_2=0.22$)

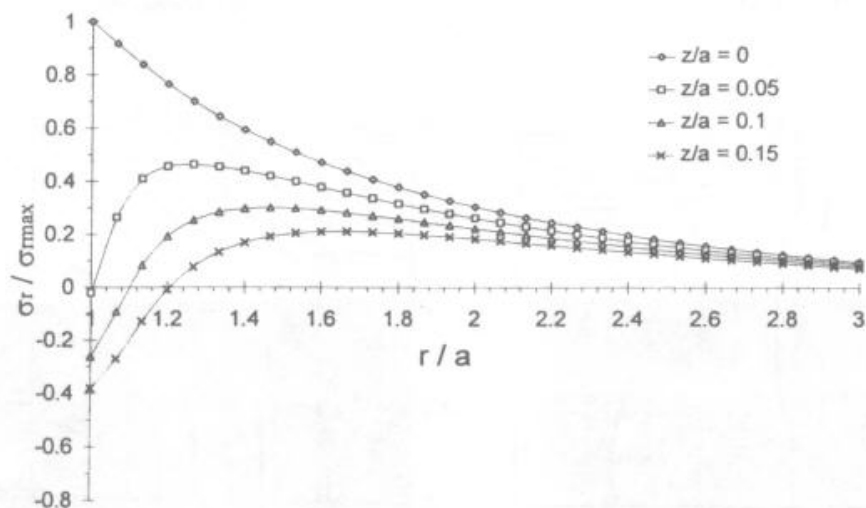


Fig. 7 - Tensione radiale in superficie e al disotto della superficie : piastra sottile ($a_\infty/h=2$). ($a_\infty/R=1/12$; $E_1=210$ GPa, $E_2=70$ GPa ; $\nu_1=0.3$, $\nu_2=0.22$)

hertziano un massimo pari a circa l' 1.7% della pressione media di contatto, ossia circa 10 volte inferiore al massimo della tensione radiale) è necessario un valore di carico elevato, che si realizza più facilmente in condizioni dinamiche che statiche. Per una piastra "moderatamente sottile", tuttavia, (vedi fig.8) si riscontra un notevole incremento della zona in trazione circonferenziale, pari a circa 4 volte il valore hertziano, rispetto all'aumento dell' 83% del picco di tensione radiale. Eventuali cricche presenti in questa regione sono soggette ad una trazione biassiale (σ_1 , σ_3) di valore circa costante lungo tutta la loro lunghezza. E' probabile quindi che l'importanza reciproca delle due modalità di frattura sia notevolmente alterata nel caso di piastra sottile.

3.2 Indagine sperimentale

Una verifica sperimentale della modalità di frattura è stata effettuata su piastre in vetro sodico-calcico di spessore 12mm. Per poter agevolmente ottenere dei rapporti h/a_∞ sufficientemente bassi si è preferito ricorrere a penetratori a faccia piana, il cui effetto risulta qualitativamente analogo a quello di una sfera di elevato diametro, come si è potuto verificare nel corso di un lavoro in corso di pubblicazione [25].

Per le prove si sono realizzate attrezzature di carico da applicare ad una macchina di prova universale di tipo INSTRON 1130 che utilizzano come penetratori rulli cilindrici di cuscinetti volventi di produzione commerciale di diametro pari a 3 e 12mm, in modo da ottenere h/a_∞ pari a 8 e 2, rispettivamente. Le superfici dei campioni sono state abrase con carta abrasiva (N120) per generare una difettosità superficiale pronunciata e uniforme. Nel caso di h/a_∞ elevato, si sono ottenuti al raggiungimento della condizione critica (alla velocità minima della traversa, pari a 0.05 mm/1') dei coni hertziani come quello mostrato in fig.9a, sviluppati, in genere, fino a raggiungere la base della piastra stessa. Nel secondo caso, invece, al raggiungimento della condizione critica, si ottengono sempre due modi di frattura: quello conico, caratterizzato da angoli di apertura del cono molto bassi, e quello radiale (dovuto alle tensioni circonferenziali), caratterizzato da un numero variabile di superfici di frattura (fig.9b).

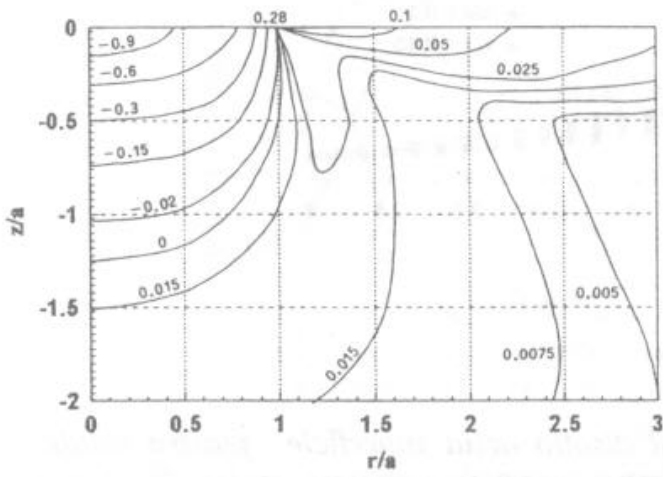
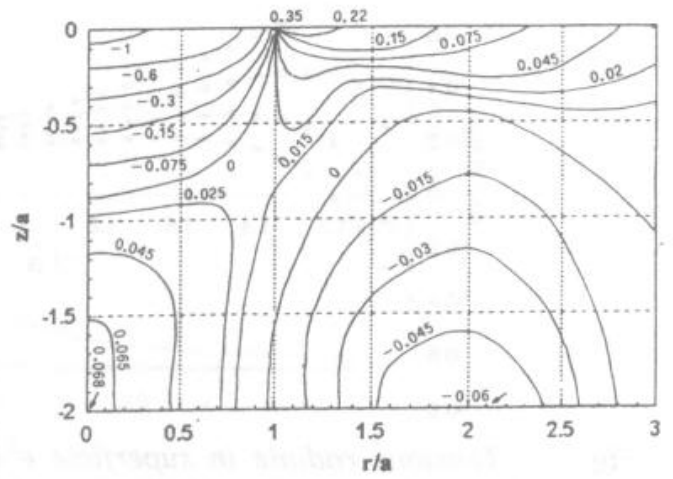
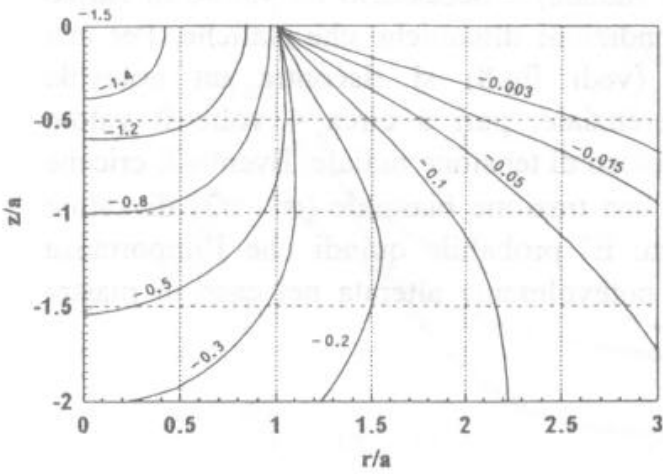
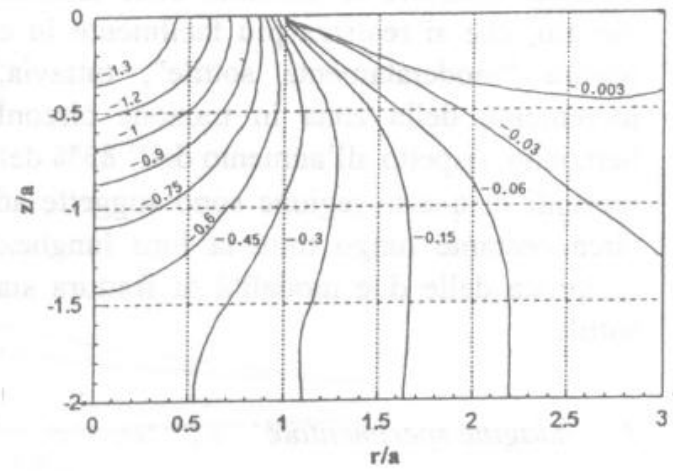
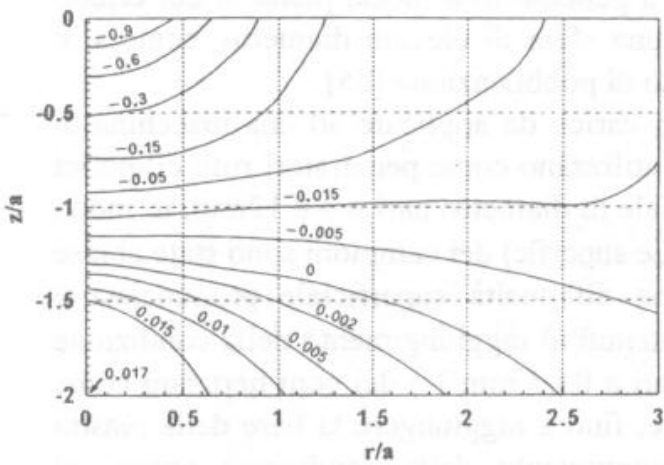
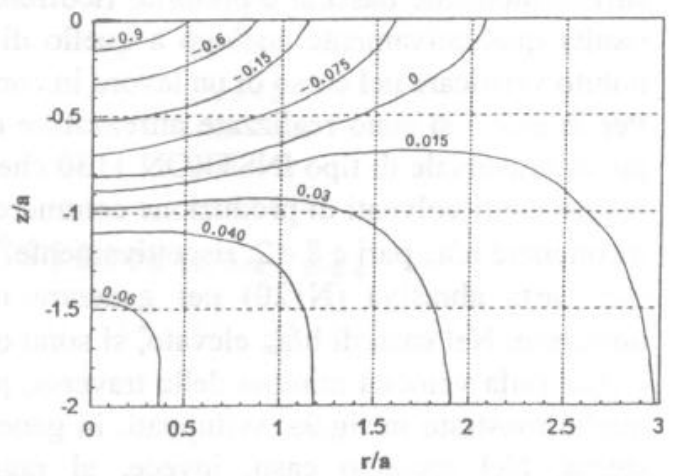
$\sigma_1 / p_{med} (A)$  $\sigma_1 / p_{med} (B)$  $\sigma_2 / p_{med} (A)$  $\sigma_2 / p_{med} (B)$  $\sigma_3 / p_{med} (A)$  $\sigma_3 / p_{med} (B)$ 

Fig.8 - Curve isolivello delle tensioni principali: (A) $a_\infty/h=1/20$; (B) $a_\infty/h=1/2$.

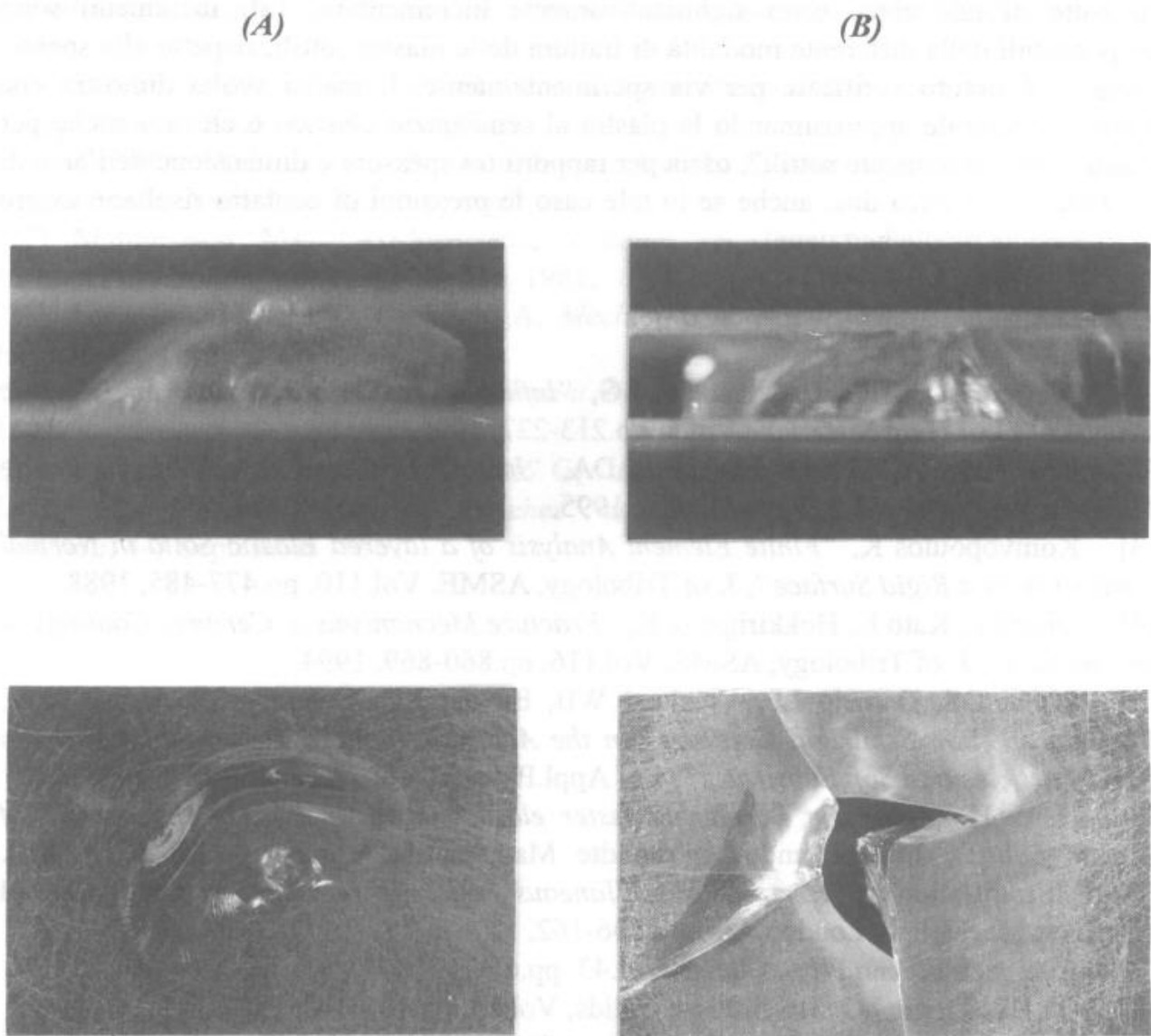


Fig.9 - Aspetto tipico delle piastre di vetro di spessore 12mm, fratturate per contatto normale con penetratori cilindrici a faccia piana: (A) $a_0/h=1/8$, formazione di un cono hertziano parziale (probabile presenza di tensioni residue, dissimmetrie di carico, o di difettosità nel vetro); (B) $a_0/h=1/2$, formazione parziale di un cono a basso angolo di apertura, e di 4 fratture radiali.

4. Conclusioni

E' stato studiato il contatto assialsimmetrico tra una sfera elastica e una piastra, di materiale meno rigido, appoggiata su un supporto rigido senza attrito (ovvero di una piastra compressa tra due sfere uguali). Sono stati forniti i diagrammi delle pressioni di contatto al variare dello spessore della piastra tra i due estremi hertziani di contatto sfera-semispazio e sfera-sfera. Si sono riscontrati notevoli incrementi delle tensioni di trazione, principalmente responsabili delle fratture fragili, già per piastre "moderatamente sottili", ossia aventi rapporto tra spessore e raggio dell'area di contatto pari a 2. In questo caso le pressioni di contatto rimangono sostanzialmente invariate rispetto al caso di contatto sfera-semispazio, mentre le tensioni radiali superficiali

all'esterno dell'area di contatto, e ancora di più, le tensioni circonferenziali e radiali al di sotto di tale zona, sono significativamente incrementate. Tali incrementi sono responsabili della differente modalità di frattura delle piastre sottili, rispetto alle spesse, come si è potuto verificare per via sperimentalmente. L'analisi svolta dimostra che l'errore ottenibile approssimando la piastra al semispazio elastico è elevato anche per piastre "moderatamente sottili", ossia per rapporti tra spessore e dimensione dell'area di contatto pari a circa due, anche se in tale caso le pressioni di contatto risultano essere praticamente quelle hertziane.

4. Bibliografia

- [1] Warren PD, Hills DA, Roberts SG, "Influence of Surface Cracks on Hertzian Fracture", J.of Hard Materials, Vol.5, pp.213-227, 1994.
- [2] Korsunsky A, Warren PD, Hills DA, "Impact Fracture Thresholds in Brittle Solids", Wear, Vol.186-187, pp.99-104, 1995.
- [3] Komvopoulos K, "Finite Element Analysis of a layered Elastic Solid in Normal Contact With a Rigid Surface", J. of Tribology, ASME, Vol.110, pp.477-485, 1988.
- [4] Diao DF, Kato K, Hokkirigama K, "Fracture Mechanisms of Ceramic Coatings in Indentation", J. of Tribology, ASME, Vol.116, pp.860-869, 1994.
- [5] Rimai DS, Demejo LP, Vreeland WB, Bowen RC, Gaboury SR, Urban MW, "Effects of Thin, Semirigid Coatings, on the Adhesion-induced Deformation between Rigid Particles and Soft Substrates", J.of Appl.Physics, Vol.73, pp.668-672, 1993.
- [6] Hertz H, "Über die Berührung fester elastischer Körper" (On the contact of Elastic Solids), J.Reine und Angewandte Mathematik, Vol.92, pp.156-171, 1882. (English translation in "Hertz H. Miscellaneous Papers", translated by DE Jones and GA Scott MacMillan, London, UK, pp.146-162, 1896).
- [7] Auerbach F, Ann.Phys. Chem., Vol.43, pp.61-71, 1891.
- [8] Oh HL, Finnie I, J. Mech. Phys. Solids, Vol.15, pp.401-418, 1967.
- [9] Frank FC, Lawn BR, Proc. Roy. Soc., A299, pp.291-299, 1967.
- [10] Lawn BR, *Fracture of brittle solids*, 2nd Ed., Cambridge Univ. Press, 1993.
- [11] Mougnot R, Maugis D, "Fracture indentation beneath flat and spherical punches", J. of Material Sci., Vol.20, pp.4354-4376, 1985.
- [12] Sneddon IN, *Fourier Transform*, Mc Graw Hill, New York, 1951.
- [13] Barovich D, Kingsley SC, Ku TC, Ramsey JH, "Stresses on a Thin Strip or Slab with Different Elastic Properties from that of the Substrate Due to Elliptically Distributed Load", Int.J. Engng.Sci., Vol.2, pp.253-268, 1964.
- [14] Conway HD, Vogel SM, Frnham KA, So S, "Normal and Shearing Contact Stresses in Indented Strips and Slabs", Int.J. Engng.Sci., Vol.4, pp. 343-359, 1966.
- [15] Bentall RH, Johnson KL, "An Elastic Strip in Plane Rolling Contact", Int.J.Mech.Sci., Vol.10, pp.637-663, 1968.
- [16] Nowell D, Hills DA, "Contact problems incorporating elastic layers", Int.J.Solids and Struct., Vol.24, N.1, pp.105-115, 1988.
- [17] Fellows LJ, Nowell D, Hills DA, "Short Communication: Contact stresses in a moderately thin strip (with particular reference to fretting experiments)", Wear, Vol.185, pp.235-238, 1995.
- [18] Jaffar MJ, "A Numerical Solution for Axisymmetric Contact Problems Involving Rigid Indenters on Elastic Layers", J.Mech.Phys.Solids, Vol.36, pp.401-416, 1988.

- [19] Engel PA, Conway HD, "*Contact Stresses Analysis for an Elastic Cylinder indenting a Slab in the Presence of Friction*", *Int.J. Mech.Sci.*, Vol.13, pp. 391-402, 1971.
- [20] Tu YO, "*The Contact Problem of a Plate Pressed Between Two Spheres*", *J.Appl.Mech*, ASME, pp.659-666, 1964.
- [21] Tu YO, "A Numerical Solution for an Axially Symmetric Contact Problem", *J.Appl.Mech*, ASME, pp.283-286, 1967.
- [22] Matthewson MJ, "*Axi-Symmetric Contact on Thin Compliant Coatings*", *J.Mech.Phys.Solids*, Vol.29, pp.89-113, 1981.
- [23] Hills DA, Nowell D, Sackfield A, *Mechanics of elastic contacts*, Butterworth-Heinemann, Oxford, 1993.
- [24] Becker AA, "*The Boundary Element Method in Engineering*", McGraw-Hill, 1993.
- [25] Ciavarella M, Demelio G, Monno G, "*Indentation Cracking of a Thin Elastic Layer: Flat-Ended and Spherical Punches*", accepted at the XXV AIAS Conference, Gallipoli, 4-7 September 1996.