

**IGF12 - XII Convegno Nazionale  
Gruppo Italiano Frattura  
Parma, 12-13 giugno 1996**

**LA STIMA DEL FATTORE DI INTENSIFICAZIONE DEGLI SFORZI  
IN TRAVI FESSURATE**

*Gabriella Bolzon*

Dipartimento di Ingegneria Strutturale  
Politecnico di Milano  
Piazza Leonardo da Vinci 32 - 20133 Milano

**PAROLE CHIAVE:** Frattura lineare elastica, fattore di intensificazione degli sforzi, elementi di trave.

**SOMMARIO**

Si presenta un metodo semplificato per la valutazione del fattore di intensificazione degli sforzi (SIF) di travi fessurate a sezione rettangolare, deformabili prevalentemente per flessione, in condizioni di vincolo generiche, nell'ipotesi di avanzamento uniforme del fronte della frattura nel piano della sezione. I risultati possono essere facilmente estesi alle sezioni, di largo impiego, costituite dall'assemblaggio di elementi rettangolari (travi a T, o a I).

**1. INTRODUZIONE**

La meccanica della frattura lineare elastica permette di prevedere il comportamento di travi metalliche che si degradano per formazione e crescita di fratture, dovute ad esempio a fenomeni di fatica, mediante l'uso del fattore di intensificazione degli sforzi (SIF), funzione della profondità della frattura nonché della geometria e delle condizioni

al contorno. Per elementi di particolare geometria sottoposti a sollecitazioni semplici, di flessione o di torsione, frequentemente usati nella sperimentazione per la determinazione dei parametri di frattura o di tenacità, il valore dei SIF può essere reperito in letteratura [1,3]; per geometrie meno comuni, o più complesse, si fa solitamente ricorso a più o meno sofisticate analisi basate sul metodo degli elementi finiti, mediante l'uso di elementi speciali [4,5], o degli elementi al contorno [6].

Ad una valutazione "ingegneristica" dei SIF si può pervenire, in alternativa, attraverso il calcolo dell'energia rilasciata per unità di avanzamento della frattura, correlata alla variazione dell'energia di deformazione del solido in esame, come introdotto in [7,8] e discusso in [9]. Nel caso di strutture intelaiate, in condizioni staticamente determinate, l'energia rilasciata può essere direttamente associata alle caratteristiche inerziali "efficaci" delle travi, funzione del numero e della profondità delle fratture. In strutture iperstatiche interviene anche la redistribuzione delle sollecitazioni conseguente al degrado delle sezioni.

Su questa base è stato formulato il metodo semplificato che viene qui presentato con riferimento a travi di sezione rettangolare, deformabili prevalentemente per flessione, nell'ipotesi di avanzamento uniforme del fronte della frattura nel piano della sezione, ma senza limitazioni sulle condizioni di vincolo. I risultati possono essere facilmente estesi [10] alle sezioni di diffuso impiego costituite dall'assemblaggio di elementi rettangolari (travi a T, a I), ed essere impiegati per stimare, ad esempio, la vita a fatica di diversi elementi strutturali, dalle travi da ponte alle rotaie ferroviarie.

## 2. IL METODO PROPOSTO

Le strutture che si considerano in questa nota sono costituite dall'assemblaggio di travi, o di porzioni di trave, di sezione rettangolare, in condizioni di flessione su un piano principale. Si può dunque avanzare l'ipotesi di crescita uniforme della frattura, caratterizzata dalla sua lunghezza,  $a$ , ovvero dal parametro adimensionale  $\alpha = a/h$ . Per la definizione dei simboli, si veda Fig. 1.

Il rateo di rilascio di energia, che rappresenta la forza termodinamica coniugata all'avanzamento del fronte della frattura, può essere derivato dalla energia di deformazione  $U$  del solido in esame:

$$bG = \frac{\partial U}{\partial a} = \frac{1}{h} \frac{\partial U}{\partial \alpha} \quad (1)$$

L'energia di deformazione  $U$  può essere valutata come somma dei contributi di ciascuna porzione di trave, supposta deformabile prevalentemente per flessione, secondo l'espressione seguente:

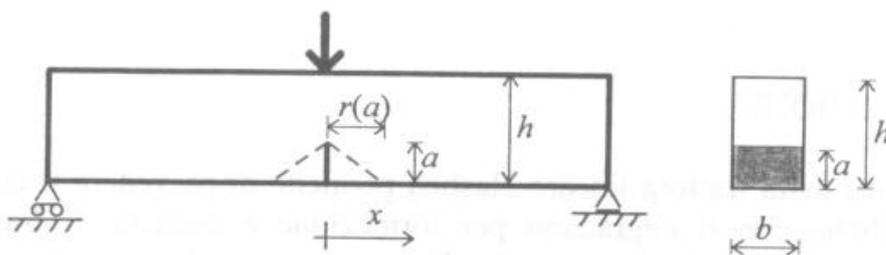


Fig. 1. Illustrazione di alcuni simboli in una situazione rappresentativa

$$U = \frac{1}{2} \int \frac{M(x)^2}{EJ(x)} dx \quad (2)$$

dove  $E$  rappresenta il modulo di Young del materiale e  $J(x)$  rappresenta il momento d'inerzia delle sezioni.

Il SIF può essere quindi ricavato da  $G$  attraverso la relazione [8]:

$$G = \frac{K^2}{E'} \quad (3)$$

dove il fattore  $E'$  è pari al modulo di Young in condizioni di stato piano di tensione all'apice della fessura, e pari a  $E/(1-\nu^2)$ , con  $\nu$  modulo di Poisson, in stato di deformazione piana.

Si assume, come spesso nella pratica, che le azioni esterne siano rappresentate da forze concentrate, ovvero che la distribuzione dei momenti flettenti sia lineare a tratti. Il momento flettente agente in una porzione di trave lunghezza  $l$  si può dunque esprimere nella forma

$$M(x) = M_C + \frac{M_E - M_C}{l} x = M_C \left[ 1 + (\mu - 1) \frac{x}{l} \right] \quad (4)$$

dove  $M_C$  ed  $M_E$  rappresentano il valore del momento alle estremità della porzione di trave in considerazione, e  $\mu = M_E/M_C$ .

Si consideri ora una trave inizialmente integra, di inerzia uniforme pari a  $J_0$ , e si supponga che si sviluppi una fessura in corrispondenza della sezione maggiormente sollecitata, caratterizzata dal momento flettente  $M_C$ . Il valore corrente della rigidezza della trave, che risulta dalla distribuzione delle inerzie  $J(x)$ , può essere stimato considerando il contributo delle sole porzioni di trave che si trovano al di sopra delle linee di diffusione degli sforzi, rappresentate da linee tratteggiate in Fig. 1, ovvero:

$$J(x) = J_0 [1 - f(a, x)], \quad 0 \leq x \leq r(a) \quad (5a)$$

$$J(x) = J_0, \quad x > r(a) \quad (5b)$$

dove  $f(a, x)$  è in generale funzione della forma della sezione, e  $0 \leq f(a, x) \leq 1$ .

La sostituzione delle relazioni (4) e (5) nella espressione dell'energia di deformazione (2) fornisce:

$$U = U_0 + \frac{1}{2} \frac{M_C^2}{EJ_0} \left[ \int_0^{r(a)} g(a, x) dx + 2 \frac{\mu - 1}{l} \int_0^{r(a)} x g(a, x) dx + \frac{(\mu - 1)^2}{l^2} \int_0^{r(a)} x^2 g(a, x) dx \right] \quad (6)$$

dove  $U_0$  rappresenta l'energia di deformazione della trave integra, e si è operata la sostituzione

$$g(a, x) = \frac{f(a, x)}{1 - f(a, x)} \quad (7)$$

Nel caso di sezioni rettangolari, come qui ipotizzato, la funzione  $f(a, x)$  assume l'espressione:

$$f(a, x) = 3\bar{\alpha} - 3\bar{\alpha}^2 + \bar{\alpha}^3 \quad (8a)$$

dove

$$\bar{\alpha} = \bar{a}/h; \quad \bar{a} = a[1 - x/r(a)] \quad (8b)$$

La funzione  $r(a)$  è stata ricavata mediante l'interpolazione (e l'estrapolazione) dei risultati di analisi numeriche di travi con rapporto luce/altezza pari a 5, 10 e 25, in condizioni di flessione semplice e di flessione su tre punti, per profondità della frattura  $0 \leq \alpha \leq 0.25$ . Le travi sono state modellate attraverso elementi finiti piani, nell'ipotesi di stato piano di tensione, ovvero di spessore sottile. La distanza  $r(a)$  è stata determinata a partire dal valore delle tensioni principali di trazione al bordo inferiore della trave, come distanza dall'asse di simmetria di quella sezione in corrispondenza della quale le suddette tensioni risultano pari a quelle relative alla trave integra ( $\alpha=0$ ) con una tolleranza di circa il 10%. Le analisi numeriche hanno fornito risultati discretamente indipendenti dalle condizioni di carico ma non dalla profondità dell'intaglio. Questi risultati, resi adimensionali nella forma  $\rho(\alpha) = r(a)/h$ , sono riportati in Fig. 2 insieme con il diagramma della funzione di interpolazione e di estrapolazione dei dati

$$\rho(\alpha) = 1 - e^{-4\alpha} \quad (9)$$

In Fig. 2 è diagrammata anche la funzione  $\rho(\alpha)$  ottenuta [11] in base alle soluzioni analitiche note, per il caso di flessione uniforme, nelle situazioni limite  $\alpha \rightarrow 0$  e  $\alpha \rightarrow 1$ :

$$\rho(\alpha) = 1.319 [1 + 2(1-\alpha)^{6.65}] \alpha \quad (10)$$

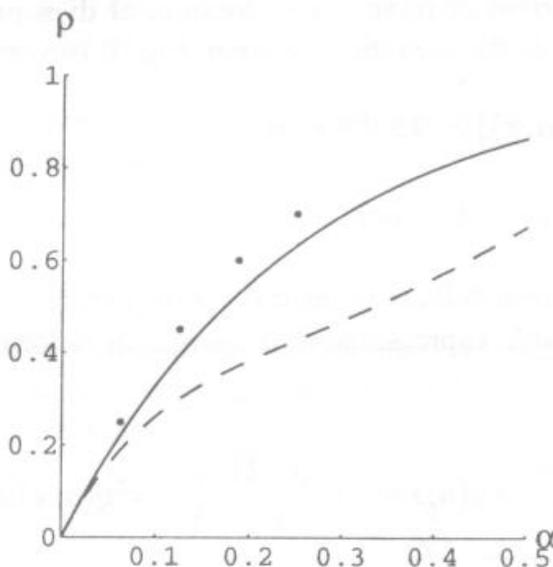


Fig. 2. Ampiezza della zona di diffusione degli sforzi: i risultati numerici e le funzioni assunte nel presente approccio (linea continua) e in letteratura [11] (linea tratteggiata).

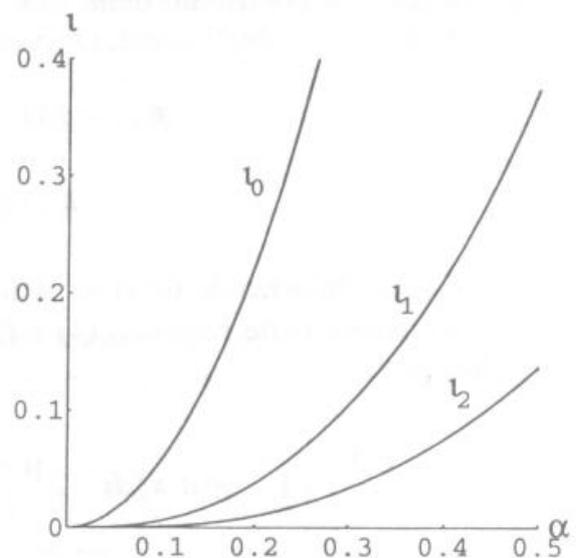


Fig. 3. Diagramma delle funzioni adimensionali  $l_0(\alpha)$ ,  $l_1(\alpha)$ ,  $l_2(\alpha)$ .

Si osservi l'accordo tra le funzioni definite da (9) e da (10) per  $\alpha \rightarrow 0$ , situazione che rende confrontabili la trattazione corrente con quella svolta in [11], che prevede una brusca variazione della distribuzione delle rigidzze in prossimità della sezione interessata dalla frattura.

La sostituzione di (9) nella (8) e nella (6) permette di esprimere la funzione  $U$  in forma esplicita

$$U = U_0 + \frac{1}{2} \frac{M_C^2 h}{EJ_0} \left[ \iota_0(\alpha) + 2(\mu - 1) \frac{h}{l} \iota_1(\alpha) + (\mu - 1)^2 \frac{h^2}{l^2} \iota_2(\alpha) \right] \quad (11)$$

attraverso le seguenti funzioni adimensionali che risultano dalla integrazione dei termini in (6):

$$\iota_0(\alpha) = \frac{(3 - 2\alpha)}{2} \frac{\alpha}{(1 - \alpha)^2} (1 - e^{-4\alpha}) \quad (12)$$

$$\iota_1(\alpha) = \frac{1}{2} \frac{\alpha}{1 - \alpha} (1 - e^{-4\alpha})^2 \quad (13)$$

$$\iota_2(\alpha) = \left\{ \frac{6\alpha + 3\alpha^2 + 2\alpha^3}{6\alpha^3} + \ln \left[ (1 - \alpha)(1 - e^{-4\alpha})^2 \right] \right\} (1 - e^{-4\alpha})^3 \quad (14)$$

Per i dettagli di tale derivazione si rimanda a [10]. I diagrammi delle funzioni (12)-(14) sono rappresentati in Fig. 3. Si osservi, in particolare, che  $\iota_2(\alpha) < \iota_1(\alpha) < \iota_0(\alpha)$  in modo significativo per ogni valore di  $\alpha$ .

### 3. IL CASO ISOSTATICO

In una struttura staticamente determinata, la distribuzione dei momenti flettenti non risente della eventuale presenza di una fessura sebbene la rigidzza vari in funzione della profondità dell'intaglio. Il valore del momento flettente  $M_C$  trasmesso attraverso la sezione critica può essere dunque considerato costante, e il SIF può essere valutato mediante la derivazione rispetto ad  $\alpha$  delle (12)-(14).

I casi di flessione semplice e di flessione su tre punti sono particolarmente significativi in quanto situazioni di riferimento nella sperimentazione; i relativi SIF sono stati quindi ricavati con una certa accuratezza e sono riportati ad esempio in [2] in funzione della profondità dell'intaglio. Queste espressioni possono essere combinate con la (3) per fornire, nella ipotesi di stato piano di sforzo all'apice della fessura, ovvero di spessore  $b$  sottile, il rateo di rilascio di energia  $G$  nella forma:

$$G = 3 \frac{M_C^2}{EJ_0} \alpha [\varphi_k(\alpha)]^2 \quad (15)$$

dove, ad esempio:

$$\varphi_k(\alpha) = \sqrt{\pi} (1.122 - 1.4\alpha + 7.33\alpha^2 - 13.08\alpha^3 + 14\alpha^4) \quad (16)$$

$$\varphi_k(\alpha) = \sqrt{\pi}(1.121 - 1.199\alpha + 4.775\alpha^2 - 1.628\alpha^3 + 7.035\alpha^4 + 13.27\alpha^5) \quad (17)$$

sono espressioni alternative, che forniscono valori praticamente coincidenti per il caso di flessione semplice;

$$\varphi_k(\alpha) = \frac{1.99 - \alpha(1 - \alpha)(2.15 - 3.93\alpha + 2.7\alpha^2)}{(1 + 2\alpha)(1 - \alpha)^{3/2}} \quad (18)$$

è l'espressione data per il caso di flessione su tre punti e rapporto luce/altezza pari a 4;

$$\varphi_k(\alpha) = 1.96 - 2.75\alpha + 13.66\alpha^2 - 23.98\alpha^3 + 25.22\alpha^4 \quad (19)$$

è l'espressione data per il caso di flessione su tre punti e rapporto luce/altezza pari a 8. I diagrammi del fattore adimensionale  $\kappa(\alpha) = G E J_0 / M_C^2$  che si deduce dalla (15) attraverso le (16)-(19), nelle diverse condizioni di carico, sono confrontati in Fig. 4 con i diagrammi della stessa funzione  $\kappa(\alpha)$  ottenuti per derivazione della (11), con l'ausilio delle (12)-(14), nelle stesse ipotesi. Si osserva un buon accordo tra i valori calcolati mediante il metodo approssimato qui presentato e i più accurati risultati dedotti dalla letteratura.

#### 4. IL CASO IPERSTATICO

Nel caso di una struttura staticamente indeterminata (iperstatica), la distribuzione dei momenti flettenti dipende dalla distribuzione delle rigidità e quindi dalla estensione di una eventuale frattura; in particolare, il valore del momento flettente  $M_C$  trasmesso attraverso una sezione danneggiata, costante nel caso isostatico, risulta funzione di  $\alpha$ . Per valutare questa dipendenza si può far ricorso alle considerazioni seguenti.

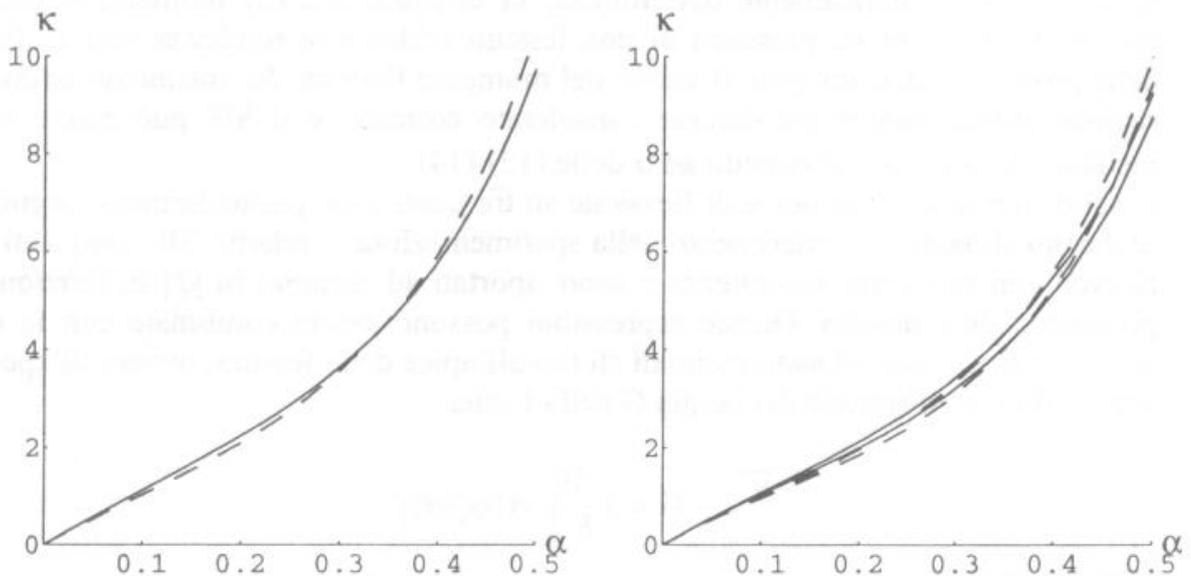


Fig. 4. Il fattore adimensionale  $\kappa$ , funzione della profondità dell'intaglio  $\alpha$ , secondo il metodo proposto (linea continua) e dalla rielaborazione di risultati disponibili in letteratura (linea tratteggiata); a sinistra: il caso di flessione semplice; a destra: il caso di flessione su 3 punti, rapporto luce/altezza=8 (curve superiori) e rapporto luce/altezza=4 (curve inferiori)

Si può innanzitutto osservare che gli addendi successivi in parentesi quadra nella espressione della energia di deformazione (11), che si annullano nel caso di flessione semplice  $\mu=1$ , forniscono ad  $U$  contributi sempre meno significativi in quanto, come già osservato,  $\iota_2(\alpha) < \iota_1(\alpha) < \iota_0(\alpha)$ ; inoltre  $(h/l)^2 < h/l < 1$  se il rapporto  $l/h$  è abbastanza elevato, come richiede la teoria classica delle travi.

Si può quindi stimare in modo approssimato ma ragionevolmente accurato la funzione energia di deformazione  $U$  mediante l'espressione

$$\tilde{U} = U_0 + [M_C(\alpha)]^2 \frac{h}{EJ_0} \iota_0(\alpha) \quad (20)$$

La funzione  $\tilde{U}$  definita da (20) può essere interpretata, in alternativa, come l'energia di deformazione di una struttura costituita da elementi tipo trave, che contribuiscono al termine  $U_0$ , e da molle flessionali di rigidezza

$$k = \frac{EJ_0}{2h\iota_0(\alpha)} \quad (21)$$

situate in corrispondenza delle sezioni fessurate, o potenzialmente fessurabili. L'espressione (21) mostra che la rigidezza  $k$  è associata alla profondità dell'intaglio mediante la funzione  $1/\iota_0(\alpha)$ , ed evolve eventualmente con essa. In particolare, si osservi che  $k \rightarrow \infty$  quando  $\alpha \rightarrow 0$ , ripristinando così la perfetta continuità tra le parti.

Lo schema strutturale costituito dalla combinazione di elementi integri di trave e da molle con rigidezza che degrada con  $\alpha$  permette di valutare agevolmente, per un data profondità dell'intaglio, la distribuzione delle sollecitazioni sulla struttura iperstatica in esame e, in particolare, la funzione  $M_C(\alpha)$  da introdurre nella (11) per risalire al SIF. Nel calcolo dei SIF risulta comunque essenziale considerare nuovamente il contributo di almeno  $\iota_1(\alpha) h/l$ , contributo che permette ad esempio di distinguere in Fig. 4 le curve relative alle due situazioni di flessione su tre punti caratterizzate da diversi rapporti dimensionali.

Si consideri, ad esempio, il caso della semplice struttura schematizzata in Fig. 5, e si supponga che la sezione posta in corrispondenza del carico sia interessata da una frattura. Lo schema operativo proposto permette di valutare facilmente il momento flettente  $M_C(\alpha)$ , che risulta:

$$M_C(\alpha) = \frac{14}{3} Pl^2 \frac{1}{9l + 2h\iota_0(\alpha)} \quad (22)$$

Non essendo disponibile un valore di riferimento del SIF per il caso in esame, si valuta l'accuratezza dei risultati del metodo approssimato qui presentato in termini di deformabilità globale, attraverso il confronto con i risultati di una più raffinata analisi che prevede la modellazione della trave mediante elementi finiti piani. La deformabilità della struttura può essere quantificata dal valore della freccia sotto il carico, e questo spostamento può essere calcolato mediante il principio dei lavori virtuali, come somma dei contributi di ciascuna porzione di trave adiacente alla sezione caricata:

$$d(\alpha) = \int_0^{2l} \frac{\bar{M}_l(x) M_l(x)}{E J(x)} dx + \int_0^l \frac{\bar{M}_r(x) M_r(x)}{E J(x)} dx \quad (23)$$

dove, ad esempio:

$$\int_0^l \frac{\bar{M}_r(x) M_r(x)}{E J(x)} dx = \frac{M_c(\alpha)}{E J_0} \frac{2l}{3} \left[ \int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 dx + \int_0^{r(a)} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 g(a, x) dx \right] \quad (24)$$

e

$$\int_0^{r(a)} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 g(a, x) dx = h \left[ v_0(\alpha) - 2 \frac{h}{l} v_1(\alpha) + \frac{h^2}{l^2} v_2(\alpha) \right] \quad (25)$$

Nella valutazione della freccia sotto il carico intervengono quindi nuovamente gli integrali  $v_k(\alpha)$  che permettono la derivazione dei SIF.

Lo spostamento  $d(\alpha)$  ottenuto per questa via, in ottimo accordo con i risultati della analisi ad elementi finiti, è diagrammato in Fig. 5 attraverso il rapporto  $\eta = d(\alpha)/d_0$ , dove  $d_0$  rappresenta la freccia della trave integra.

## CONCLUSIONI

In questa nota è stato presentato un metodo approssimato per la valutazione dei SIF in strutture intelaiate in condizioni generiche di vincolo. Il metodo si basa sulla determinazione del rateo di restituzione di energia elastica per avanzamento del fronte della frattura, la cui espressione è data in forma esplicita nell'ipotesi di elementi a sezione rettangolare, deformabili prevalentemente per flessione agente su un piano principale di inerzia. Il confronto con più elaborate analisi ad elementi finiti mostra che il metodo è certamente conveniente dal punto di vista dell'onere computazionale e, nel contempo, sufficientemente accurato per le pratiche applicazioni. I risultati possono essere facilmente estesi alle sezioni, di largo impiego, costituite dall'assemblaggio di elementi rettangolari (travi a T, o a I) come mostrato in [10].

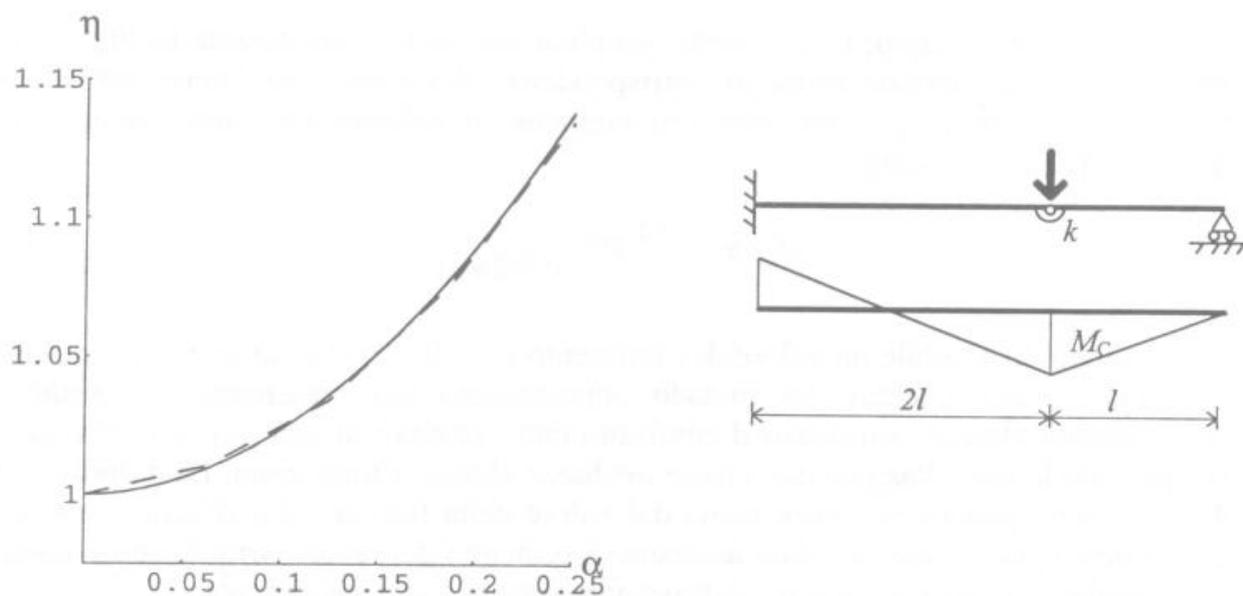


Fig. 5. Lo spostamento sotto il carico della struttura in figura, reso adimensionale attraverso il rapporto  $\eta = d(\alpha)/d_0$ , calcolato mediante la schematizzazione proposta (linea continua) e mediante discretizzazione con elementi finiti piani (linea tratteggiata).

## RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

1. G.C. Sih (1973) *Handbook of Stress Intensity Factors for Researchers and Engineers*. Institute for Fracture and Solid Mechanics, Lehigh University, Bethlehem, PA.
2. H. Tada, P.C. Paris and G.R. Irwin (1985) *The Stress Analysis of Cracks Handbook*, 2nd edn. Paris Productions.
3. Y. Murakami, ed. (1987) *Handbook of Stress Intensity Factors*, Pergamon Press, Oxford.
4. S.E. Benzley (1974) Representation of singularities with isoparametric finite elements. *Int. J. Num. Meth. Engng* **8**, 537-545.
5. R.S. Barsoum (1976) On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics. *Int. J. Num. Meth. Engng* **10**, 25-38.
6. T.A. Cruse (1988) *Boundary Element Analysis in Computational Fracture Mechanics*, Kluwer Academic.
7. A.A. Griffith (1921) The phenomena of rupture and flow in solids. *Phil. Trans. Royal Soc.* **A221**, 163-198.
8. G.R. Irwin (1957) Analysis of stresses and strains near the end of a crack. *ASME J. Appl. Mech.* **24**, 361-364.
9. R.F. Keating and G.B. Sinclair (1995) On the fundamental energy argument of elastic fracture mechanics. *Int. J. Fracture* **74**, 43-61.
10. G. Bolzon (1996) An approximate method for fatigue-life prediction of framed structures. *Fatigue Fract. Engng Mat. Struct.*.
11. H. Gao and G. Herrmann (1992) On estimates of stress intensity factors for cracked beams and pipes. *Engng Fract. Mech.* **41**, 695-706.