

# AFFIDABILITÀ DEI LAMINATI COMPOSITI SOTTOPOSTI A CARICHI DI SCORRIMENTO VISCOSO: UN MODELLO VISCOELASTOPLASTICO

Ikonomopoulos G., Marchetti M.

Università degli Studi di Roma "La Sapienza"  
Facoltà di Ingegneria, Dipartimento Aerospaziale  
Via Eudossiana 18, 00184 Roma

**PAROLE CHIAVE:** Tensore di danneggiamento, Evoluzione del danneggiamento, Microcricche, Modello viscoelastoplastico, Scorrimento viscoso, Carichi multiassiali, Materiali compositi, Teoria di laminazione, Sequenza di laminazione.

## SOMMARIO

Nel presente lavoro viene presentato un modello teorico viscoelastoplastico per l'analisi del danneggiamento nei laminati in composito sottoposti a carichi multiassiali in condizioni di scorrimento viscoso. Il danneggiamento viene introdotto in forma di microcricche all'interno della matrice od anche all'interfaccia tra fibra e matrice ed analizzato attraverso l'introduzione di parametri di danneggiamento nelle equazioni costitutive dei laminati. In particolare, viene introdotto un tensore che rappresenta il danneggiamento nel campo elastico, modificando sia la forma che la natura di quest'ultimo. Per calcolare la deformazione totale del laminato vengono presi in considerazione fenomeni plastici e viscosi. In questi fenomeni si tiene conto del danneggiamento esprimendo le deformazioni del laminato in funzione dei parametri caratteristici del danneggiamento. Il risultante sistema di equazioni (capace di descrivere fenomeni non reversibili come danneggiamento e plasticità) risulta fortemente non lineare. Per risolverlo è necessario l'impiego di metodi numerici. Nel presente lavoro viene analizzato lo scorrimento viscoso e l'influenza del danneggiamento sul medesimo in laminati compositi. I risultati numerici sono stati confrontati con dati sperimentali ottenuti in tubi Glass-Epoxy, sottoposti a carichi multiassiali.

## 1. INTRODUZIONE

Il comportamento dei materiali compositi in presenza di danneggiamento desta particolare interesse, visto che mantengono buone caratteristiche meccaniche, pur contenendo elevate quantità di imperfezioni. Non di meno, la regola generale resta sempre che un incremento del danneggiamento porta ad un'abbassamento delle caratteristiche meccaniche

del materiale [1]. Di conseguenza, risulta di fondamentale importanza la determinazione, non solo della quantità del danno, ma soprattutto il suo evolvere nel tempo, in modo da stabilire con elevata accuratezza la vita utile del materiale. Il danneggiamento dei compositi sottoposti a carichi semplici è già stato analizzato, ma esistono pochissimi studi sul loro comportamento a carichi multiassiali ed in particolare in condizioni di scorrimento viscoso [1,2].

Nei primi sviluppi del presente modello, il laminato veniva considerato come un materiale ortotropo e modellizzato globalmente. Tuttavia, questo metodo era capace di caratterizzare solo laminati simmetrici sottoposti a carichi di pressione interna o trazione, ma non era in grado di tenere conto dei possibili fenomeni di accoppiamento tra deformazione e curvatura, spesso presenti nei laminati compositi [3,4].

Nel presente lavoro la singola lamina viene modellizzata attraverso un modello di danneggiamento viscoelastoplastico e successivamente, il comportamento della medesima viene integrato nello spessore del laminato attraverso l'estensione della classica teoria di laminazione. Questo nuovo approccio permette di caratterizzare laminati con sequenza di laminazione generica e sottoposti a carichi multiassiali di pressione interna, trazione, torsione ed anche flessione.

## 2. MODELLIZZAZIONE VISCOELASTOPLASTICA IN PRESENZA DI DANNEGGIAMENTO

Nel presente modello, il danneggiamento consiste nella creazione di microfessure o microvuoti all'interno del materiale. Le lamine vengono considerate come costituite di materiale omogeneo ed ortotropo, mentre per i difetti microscopici, si ipotizza che siano localmente omogenei, risultando così possibile rappresentarli da variabili interne ed integrarli nelle leggi di comportamento del materiale. In particolare, si studiano microcricche, microvuoti, fenomeni di debonding e la loro evoluzione nel tempo. La direzione delle microfessure viene considerata parallela alla direzione delle fibre in ogni lamina (come direzione più rappresentativa del danneggiamento nei compositi) rispettando così gli assi di ortotropia del materiale [4,5].

Difetti macroscopici non vengono analizzati attraverso la presente modellizzazione. Fenomeni come delaminazione etc. risultano legati piuttosto alla meccanica della frattura che ad un modello di danneggiamento. Questi fenomeni spesso si presentano verso la fine della vita utile del materiale, generalmente poco prima della rottura.

Si suppone inoltre che nella direzione delle fibre il comportamento del materiale sia puramente elastico, mentre il comportamento plastico e viscoso viene determinato fondamentalmente dalla matrice.

La deformazione totale per ogni lamina può essere espressa attraverso quattro variabili interne (deformazione elastica, viscoelastica, plastica e viscoplastica), come segue:

$$\underline{\varepsilon}_t = \underline{\varepsilon}_e + \underline{\varepsilon}_{ve} + \underline{\varepsilon}_p + \underline{\varepsilon}_{vp} \quad (1)$$

Il termine di deformazione elastica  $\underline{\varepsilon}_e$  risulta essere sempre presente nella classica formulazione della teoria della laminazione. Il termine viscoelastico  $\underline{\varepsilon}_{ve}$  rappresenta una deformazione elastica ritardata, tipica dei fenomeni di scorrimento viscoso. I due ultimi

termini nella eq.(1), tengono conto delle non linearità nel comportamento del materiale e sono legati al comportamento plastico del medesimo.

I termini di deformazione plastica possono essere legati principalmente all' esistenza del danneggiamento, ma senza che essi implicino un' evoluzione di quest' ultimo. Dal punto di vista fisico, questi termini possono essere legati ad un sfregamento tra le superfici delle microfessure, che macroscopicamente può essere descritto da una deformazione di tipo plastico, nel senso che, a causa di questo sfregamento, al cessare della sollecitazione, le superfici delle microfessure non riacquistano la posizione originaria. Dal punto di vista fenomenologico, è necessario introdurre questo tipo di deformazione nel caso di sollecitazioni sufficientemente elevate [1]. Il termine di deformazione plastica  $\underline{\varepsilon}_p$  rappresenta fenomeni istantanei, mentre il comportamento viscoso del materiale viene rappresentato da una deformazione ritardata  $\underline{\varepsilon}_{vp}$ .

Nel caso di carico in condizioni di scorrimento viscoso, risulta necessario tenere conto del contributo di tutte le componenti della deformazione, mentre il problema risulta notevolmente semplificato nel caso di carico in condizioni quasi statiche, dove è possibile ignorare i termini di deformazione relativi ai fenomeni viscosi.

Per tenere conto dell' influenza del danneggiamento nella valutazione dei vari termini della deformazione, si introduce il concetto del tensore effettivo degli sforzi  $\underline{\tilde{\sigma}}$ , definito come segue:

$$\underline{\tilde{\sigma}} = \underline{M}(\underline{D})\underline{\sigma} \quad (2)$$

dove  $\underline{M}(\underline{D})$  rappresenta l' operatore di danneggiamento, indicando con "~" grandezze calcolate in presenza di danneggiamento [3].

Dal punto di vista fisico, in presenza di danneggiamento, il tensore degli sforzi  $\underline{\tilde{\sigma}}$  effettivamente applicato sulla lamina non coincide con il carico esterno  $\underline{\sigma}$ , ma viene modificato attraverso l' operatore di danneggiamento  $\underline{M}(\underline{D})$ . In tali condizioni, per tenere conto del danneggiamento nella valutazione delle componenti della deformazione, è sufficiente sostituire  $\underline{\sigma}$  con  $\underline{\tilde{\sigma}}$ .

Per determinare valore ed evoluzione del danneggiamento, si ipotizza l' uguaglianza delle deformazioni per il materiale vergine ed il materiale danneggiato, Fig.1, espressa attraverso le seguenti relazioni [4,5]:

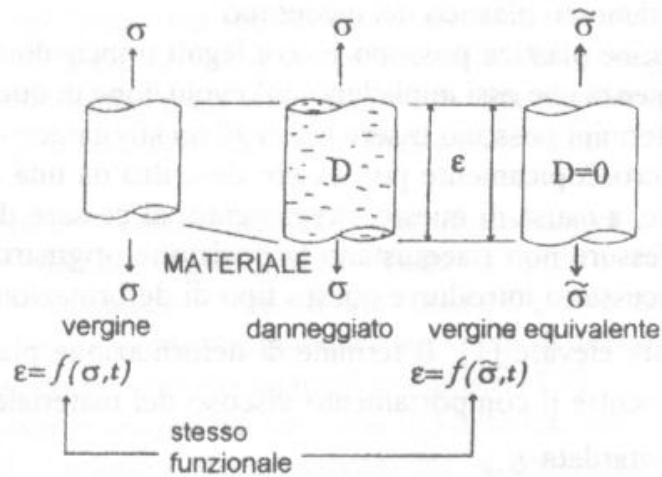
$$\underline{\tilde{\varepsilon}} = \underline{S}:\underline{\tilde{\sigma}} \quad (3)$$

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\tilde{S}}:\underline{\sigma} \quad (4)$$

risultando:

$$\underline{\tilde{\varepsilon}} = \underline{\varepsilon} \quad (5)$$

con  $\underline{\tilde{\varepsilon}}$  deformazione nel materiale danneggiato,  $\underline{S}, \underline{\tilde{S}}$  rispettivamente matrice di flessibilità della lamina vergine e danneggiata.

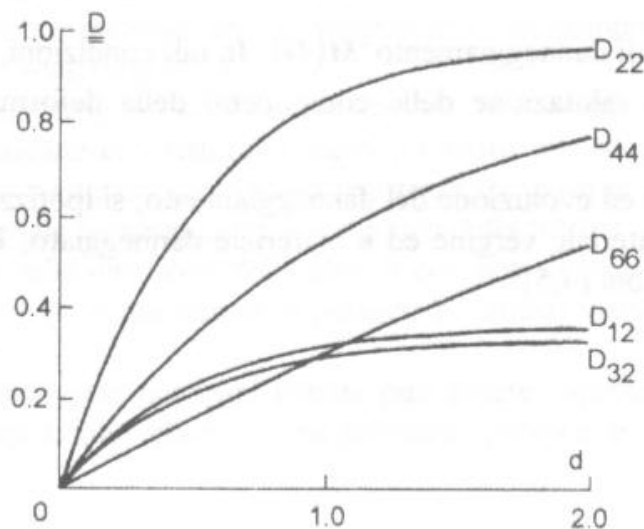


**Figura 1:** Materiale danneggiato e materiale vergine equivalente.

Attraverso le ipotesi fatte precedentemente, risulta possibile definire il danneggiamento attraverso un tensore  $\underline{D}$ , funzione della densità delle microcricche  $d$  presenti nel materiale:

$$d = \sum_{j=1}^N \frac{b_j a_j^2}{V} \quad (6)$$

dove  $N$  è il numero delle microcricche presenti nel volume  $V$ , mentre  $b$  ed  $a$  rappresentano rispettivamente la loro lunghezza e spessore. In Fig.2, risulta possibile osservare la variazione delle componenti di  $\underline{D}$  come funzione di  $d$ .



**Figura 2:** Variazione delle componenti del tensore di danneggiamento  $\underline{D}$  in funzione della densità delle microfessure  $d$ .

Determinare l'evoluzione del danneggiamento attraverso la densità delle microfessure risulta un'operazione particolarmente scomoda, visto che questo parametro è

difficilmente misurabile [3,6]. Si preferisce dunque utilizzare come variabile rappresentativa del danneggiamento la variazione del modulo trasversale della lamina:

$$D_{22} = \frac{\Delta E_{22}}{E_{22}} \quad (7)$$

risultando così possibile definire matrice di rigidezza danneggiata  $\underline{\underline{C}}$  e tensore effettivo  $\underline{\underline{\sigma}}$  come funzione di  $D_{22}$ . Notare che  $D_{22}$  non è una componente del tensore  $\underline{\underline{D}}$ .

La cinetica di  $D_{22}$  viene definita attraverso l'introduzione di una variabile interna associata al danneggiamento, la quale risulta essere funzione della densità dell'energia libera di Helmholtz [7]. Risulta necessario di introdurre anche un parametro rappresentante un incrudimento isotropo, per poter infine formulare un criterio di danneggiamento come segue:

$$f_D = \langle -Y_{22} \rangle - R_D - Y_2^c \leq 0 \quad (8)$$

con  $Y_{22}$  variabile associata al danneggiamento,  $R_D$  variabile rappresentante l'incrudimento isotropo,  $Y_2^c$  valore di soglia del danneggiamento,  $\langle a \rangle = a$  se  $a \geq 0$ , altrimenti  $\langle a \rangle = 0$ .

Determinando così valore ed evoluzione di  $\underline{\underline{\sigma}}$ , si può ottenere la componente di deformazione elastica come segue:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_e = \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\sigma}} \quad (9)$$

Con l'ipotesi di microcricche parallele alla direzione delle fibre, alcuni componenti di  $\underline{\underline{\sigma}}$  risultano inattivi sulla deformazione plastica. Seguendo un metodo proposto da A.J. Spencer per la determinazione degli sforzi attivi sulla  $\underline{\underline{\varepsilon}}_p$ , risulta possibile ottenere un criterio di plasticità come segue [8]:

$$f_p(\underline{\underline{\sigma}}) = \left[ (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}}) : \underline{\underline{M}} : (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}}) \right]^{1/2} - S_6^c \leq 0 \quad (10)$$

con  $M$  matrice di anisotropia del materiale,  $X$  somma delle variabili lineari e non lineari  $X_1, X_2$  associate ad un incrudimento cinematico,  $S_6^c$  soglia elastica al taglio.

La deformazione plastica  $\underline{\underline{\varepsilon}}_p$ , viene calcolata attraverso la seguente relazione [8,9]:

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_p = \dot{\lambda}_p \frac{\partial f_p}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \frac{\underline{\underline{M}} : (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}}) : \dot{\underline{\underline{\sigma}}}}{\underline{\underline{M}} : (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}}) : \left[ \frac{\underline{\underline{M}} : (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}}) (\delta_1 + \delta_2)}{[(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}}) : \underline{\underline{M}} : (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}})]^{1/2} - \gamma_1 \underline{\underline{X}}_1} \right]} \frac{\partial f_p}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad (11)$$



con  $\gamma_1, \delta_1, \delta_2$  parametri caratteristici del materiale.

Per ottenere la componente della deformazione viscoelastica  $\underline{\varepsilon}_{ve}$ , è stata impiegata una formulazione differenziale spettrale. Si ha:

$$\dot{\underline{\varepsilon}}_{ve} = \sum_{i=1}^3 \dot{\underline{\varepsilon}}_{ve}^i \quad \text{con} \quad \dot{\underline{\varepsilon}}_{ve}^i = -\frac{1}{\tau_i} [\underline{\varepsilon}_{ve}^i - \underline{\underline{B}}^i : \underline{\underline{\sigma}}] \quad (12)$$

con  $\tau_i$  tempi di rilassamento, definiti attraverso lo spettro continuo di rilassamento,  $\underline{\underline{B}}^i$  tensori di ampiezze viscoelastiche [10,11].

Il comportamento viscoplastico del materiale è stato modellizzato definendo le leggi di scorrimento attraverso un potenziale viscoplastico  $\varphi_{vp}^*$ , ottenuto con una legge simile a quella di Norton generalizzata [12].

La deformazione plastica ritardata  $\underline{\varepsilon}_{vp}$  si deduce attraverso le classiche leggi di scorrimento, imponendo la normalità al potenziale. Si può ottenere:

$$\dot{\underline{\varepsilon}}_{vp} = \frac{K(\underline{\underline{\varepsilon}}_{vp}) \underline{\underline{M}} : (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}}_3)}{[(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}}_3) : \underline{\underline{M}} : (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}}_3)]^{1/2}} \left[ \left\langle [(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}}_3) : \underline{\underline{M}} : (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}}_3)]^{1/2} - X_6^c \right\rangle \right]^{n_{vp}} \quad (13)$$

con  $K$  funzione della deformazione viscoplastica cumulativa ed  $\underline{\underline{X}}_3$  rappresentante una cinetica lineare,  $n_{vp}$  parametro caratteristico del materiale.

### 3. IMPLEMENTAZIONE NUMERICA

Attraverso la classica teoria dei laminati (applicata nel campo elastico) è possibile legare forze e momenti applicati sul laminato alla deformazione e curvatura del suo piano medio, in seguito ottenere la deformazione in ogni lamina e quindi lo stato di tensione in ogni lamina. Non di meno, questa teoria prevede una matrice di rigidezza costante per ogni lamina (indipendente dal carico e dalla posizione della lamina nel laminato) e quindi anche la matrice globale risulta essere costante.

Nel caso esaminato nel presente lavoro, la relazione che legga gli sforzi con le deformazioni in ogni lamina è data in forma incrementale, come segue:

$$d\underline{\underline{\sigma}} = \left( \underline{\underline{\bar{S}}}_e + \underline{\underline{\bar{S}}}_p \right)^{-1} : d\underline{\underline{\varepsilon}}_t \quad (14)$$

con  $\underline{\underline{\bar{S}}}_e, \underline{\underline{\bar{S}}}_p$  componenti della matrice di cedevolezza elastico e plastico in presenza di danneggiamento, espressi negli assi del laminato.

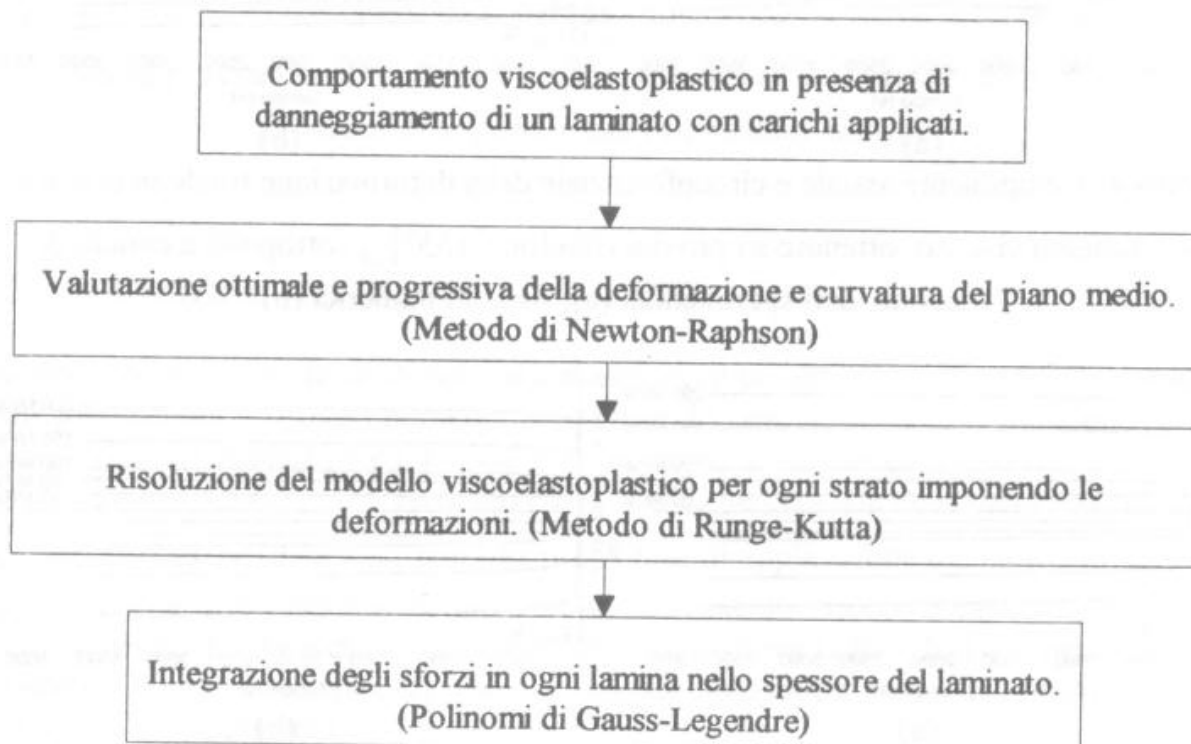
Sia danneggiamento che plasticità rappresentano fenomeni irreversibili e di conseguenza la loro evoluzione dipende dal percorso seguito. E' necessario fissare uno stato di partenza e dedurre successivamente un nuovo stato dipendente dalle prefissate condizioni

iniziali [5]. Le equazioni della teoria dei laminati estese in campo viscoelastoplastico danneggiato, si possono scrivere nella seguente forma:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{ep} &= \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\underline{\tilde{S}}_e + \underline{\tilde{S}}_p)^{-1} dz \\ \left[ \begin{array}{c} dN \\ dM \end{array} \right] &= \left[ \begin{array}{cc} \tilde{A}_{ep} & \tilde{B}_{ep} \\ \tilde{B}_{ep} & \tilde{F}_{ep} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} de_0 \\ d\rho \end{array} \right] \quad \text{avendo} \quad \tilde{B}_{ep} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\underline{\tilde{S}}_e + \underline{\tilde{S}}_p)^{-1} z dz \\ & \quad \tilde{F}_{ep} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\underline{\tilde{S}}_e + \underline{\tilde{S}}_p)^{-1} z^2 dz \end{aligned} \quad (15)$$

con,  $N$ ,  $M$ , rispettivamente forze e momenti esterni,  $e_0$ ,  $\rho$  deformazione e curvatura del piano medio del laminato.

Risulta quindi molto difficile integrare analiticamente le eq.(15), dato che le matrici di cedevolezza risultano funzione dello stato di tensione  $\underline{\sigma}$  che della posizione  $z$  della lamina nello spessore del laminato e di conseguenza non possono essere estratte dal segno del integrale presente in eq.(15). Nel caso di carichi esterni applicati sul laminato, deformazione e curvatura del piano medio non sono direttamente accessibili. Il codice numerico implementato per l'integrazione del sistema di equazioni non lineari, segue lo schema mostrato in Fig.3.

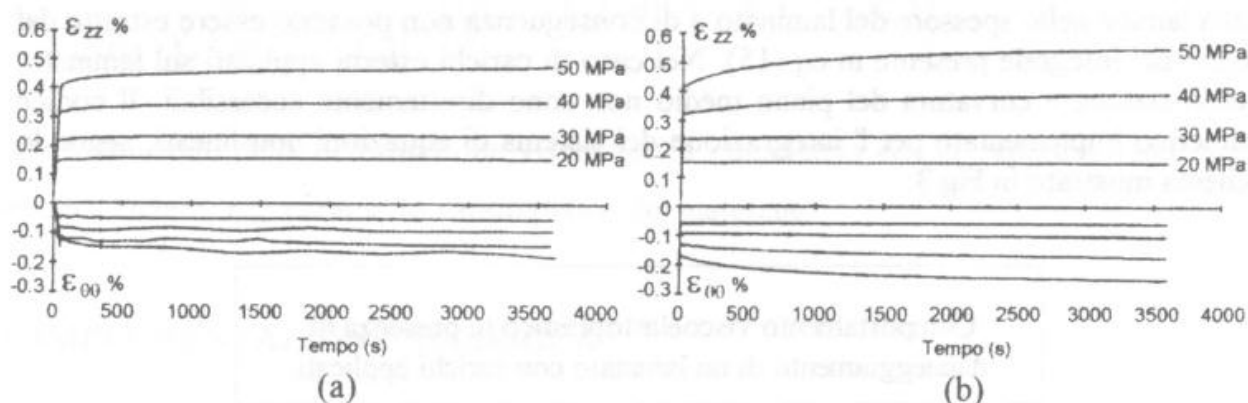


**Figura 3:** Schema di risoluzione del comportamento viscoelastoplastico danneggiato di laminati in composito.

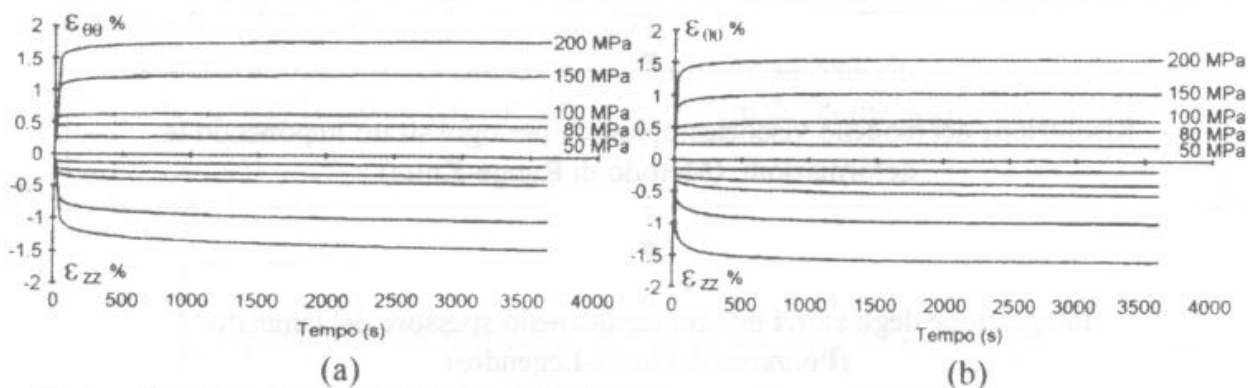
#### 4. RISULTATI NUMERICI E SPERIMENTALI

Il modello teorico/numerico è stato validato attraverso il confronto tra risultati numerici e sperimentali. In particolare i risultati sperimentali sono stati ricavati da provini cilindrici Glass-Epoxy, con 54% di contenuto in vetro, 300mm di lunghezza e 60mm di diametro, ottenuti con la tecnologia del filament winding. Lo spessore totale di ogni provino è di 2mm ed è stato ottenuto avvolgendo 6 strati con angolo di avvolgimento  $\varphi = \pm 55^\circ$ . Le prove condotte sono trazione, pressione interna pura e pressione interna con effetti di bordo [13]. Nella prova di pressione interna pura le estremità del provino sono libere di spostarsi in direzione assiale, mentre nel caso di prova a pressione interna con effetti di bordo, le estremità del provino sono bloccate alla loro posizione iniziale. Questo vincolo corrisponde ad un carico biassiale di pressione interna e trazione. Infatti, se il provino fosse libero, per effetto della pressione interna tenderebbe ad accorciarsi.

Nelle seguenti figure è possibile osservare e confrontare i risultati numerici con i dati sperimentali. In particolare, in Fig.4, si possono osservare i risultati relativi a prove di scorrimento viscoso con carichi di trazione, in Fig.5, si hanno prove di scorrimento viscoso con carichi di pressione interna pura, infine in Fig.6,7, si possono osservare rispettivamente i componenti circonferenziale e radiale della deformazione totale in condizioni di scorrimento viscoso con carichi di pressione interna con effetti di bordo.

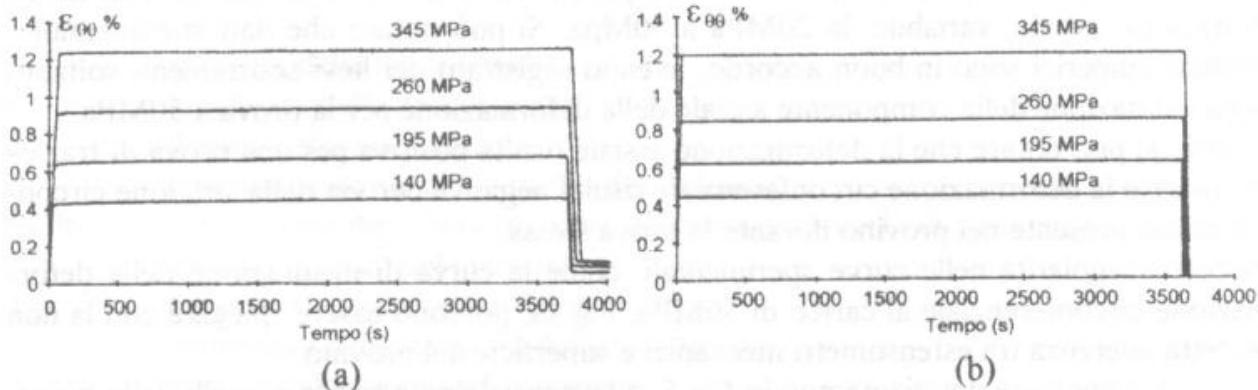


**Figura 4:** Componente assiale e circonferenziale della deformazione totale in prove di scorrimento viscoso, ottenute su provini cilindrici  $[\pm 55^\circ]_{3S}$  sottoposti a carichi di trazione; dati sperimentali (a), risultati numerici (b).

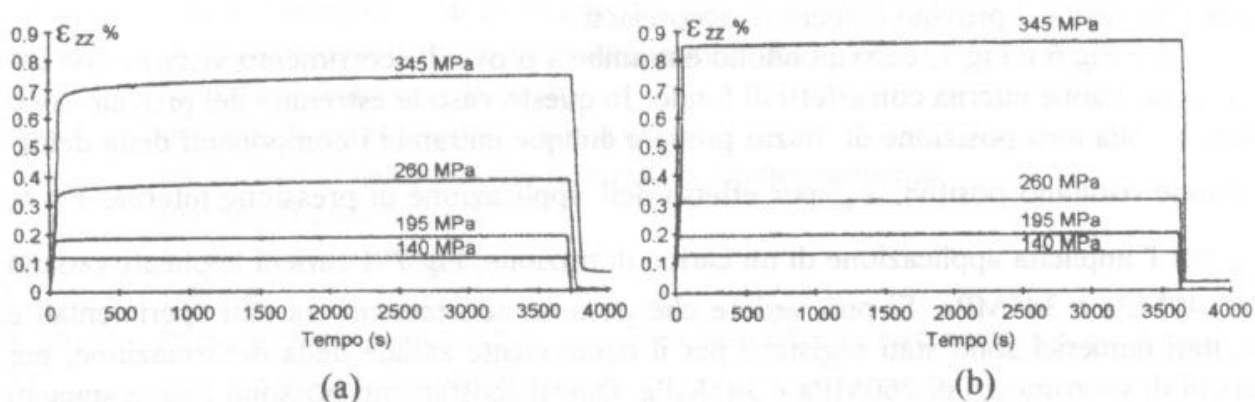


**Figura 5:** Componente assiale e circonferenziale della deformazione totale in prove di scorrimento viscoso, ottenute su provini cilindrici  $[\pm 55^\circ]_{3S}$  sottoposti a carichi di pressione interna pura; dati sperimentali (a), risultati numerici (b).





**Figura 6:** Componente circonferenziale della deformazione totale in prove di scorrimento viscoso, ottenuta su provini cilindrici  $[\pm 55^\circ]_{3S}$  sottoposti a carichi di pressione interna con effetti di bordo; dati sperimentali (a), risultati numerici (b).



**Figura 7:** Componente assiale della deformazione totale in prove di scorrimento viscoso, ottenuta su provini cilindrici  $[\pm 55^\circ]_{3S}$  sottoposti a carichi di pressione interna con effetti di bordo; dati sperimentali (a), risultati numerici (b).

## 5. DISCUSSIONE DEI RISULTATI E CONCLUSIONI

Attraverso i risultati elaborati nel presente lavoro è possibile notare un buon accordo tra dati sperimentali e risultati numerici, confermando così la validità del modello teorico in campo viscoelastoplastico ed in condizioni di carico di scorrimento viscoso.

Le Fig. 4,5,6,7, rappresentano l'andamento percentuale della deformazione assiale  $\epsilon_{zz}$  e/o circonferenziale  $\epsilon_{\theta\theta}$ , con una prima fase di applicazione del carico in condizioni quasi statiche, successivamente una fase di scorrimento viscoso a carico costante, ed in Fig. 6,7, anche una fase di scaricamento. In tutte le prove la fase di scorrimento viscoso è limitata a circa 3600sec (1 ora), che pur essendo abbastanza breve, ha potuto dare dei risultati molto significativi.

Nella prima fase di caricamento quasi statico si è osservata un'elevata tendenza al danneggiamento, soprattutto per i carichi più elevati. Tale tendenza continua anche nella prima parte della fase di scorrimento viscoso, ma per i carichi non molto elevati ben presto svanisce, lasciando spazio soprattutto ai fenomeni viscosi.

In Fig.4, si hanno i risultati relativi a più prove di scorrimento viscoso con carico di trazione assiale, variabile da 20MPa a 50MPa. Si può notare che dati sperimentali e risultati numerici sono in buon accordo, avendo registrato dei lievi scostamenti soltanto nella valutazione della componente assiale della deformazione per la prova a 50MPa.

Inoltre, si può notare che la deformazione assiale risulta positiva per una prova di trazione, mentre la deformazione circonferenziale risulta negativa per via della strizione circonferenziale presente nel provino durante la prova stessa.

Piccole irregolarità nelle curve sperimentali, come la curva di misurazione della deformazione circonferenziale al carico di 50MPa, Fig.4a, possono essere spiegate con la non perfetta aderenza tra estensometri meccanici e superficie del provino.

La tipologia dei diagrammi in Fig.5, è sostanzialmente simile a quelli della precedente figura, ma in questo caso il carico applicato è di pressione interna pura, variabile da 50MPa a 200MPa. Si può osservare la buona riuscita delle misure sperimentali, nonché l'ottimo accordo tra dati sperimentali e risultati numerici. In questo caso la deformazione circonferenziale risulta sempre positiva, come conseguenza del gonfiamento del provino dovuto alla pressione interna, mentre la deformazione assiale è negativa, visto che in questa direzione il provino è libero di accorciarsi.

Le Fig.6 e Fig.7, corrispondono entrambe a prove di scorrimento viscoso con carico di pressione interna con effetti di fondo. In questo caso le estremità del provino sono bloccate alla loro posizione di inizio prova e dunque entrambi i componenti della deformazione risultano positivi,  $\varepsilon_{\theta\theta}$  per effetto dell'applicazione di pressione interna, Fig.6,

$\varepsilon_{zz}$  per l'implicita applicazione di un carico di trazione, Fig.7. I carichi applicati variano tra 140MPa e 345MPa. Si può vedere che gli unici scostamenti tra dati sperimentali e risultati numerici sono stati registrati per il componente assiale della deformazione, per carichi di scorrimento di 260MPa e 345MPa. Questi scostamenti possono essere spiegati attraverso un'identificazione dei parametri caratteristici del materiale non sufficientemente accurata, dovuta al tasso di vetro non costante in tutti i provini, dando così origine ad elaborazioni non del tutto attendibili. Infatti, attraverso misure sperimentali si è potuto verificare che il tasso di vetro nei provini variava tra 51% e 59%, mentre il suo valore nominale era di 54%. Non di meno, bisogna notare che il carico di 345MPa risulta abbastanza prossimo al carico di rottura del provino.

Nel presente lavoro è stata dunque verificata l'utilità del modello nella previsione delle caratteristiche di materiali compositi Glass-Epoxy sottoposti a carichi di scorrimento viscoso. Determinazione dei parametri per la caratterizzazione di altri materiali, come Carbon-Epoxy etc., nonché l'implementazione del modello in un codice ad elementi finiti, possono contribuire a rendere questo approccio uno strumento utile per la determinazione dell'affidabilità, a breve o lungo termine, di materiali e strutture in composito.

## RINGRAZIAMENTI

Gli autori desiderano esprimere i loro ringraziamenti a Dr. Dominique Perreux dell'Université de Franche-Comté, Besançon, France, per il suo contributo e collaborazione.

## SIMBOLOGIA

$a$ :	spessore delle microcricche.
$b$ :	lunghezza delle microcricche.
$d$ :	densità delle microcricche.
$e_0$ :	deformazione del piano medio del laminato.
$f_D, f_p$ :	rispettivamente criterio di danneggiamento e criterio di plasticità.
$n$ :	numero di strati del laminato.
$nvp$ :	parametro viscoplastico del materiale.
$z$ :	coordinata nello spessore del laminato.
$A$ :	matrice nella teoria di laminazione.
$B$ :	matrice nella teoria di laminazione, o tensore di ampiezze viscoelastiche.
$C$ :	matrice di rigidezza.
$D$ :	tensore di danneggiamento.
$D_{22}$ :	variabile rappresentativa di danneggiamento.
$E_{22}$ :	modulo di Young trasversale nella lamina.
$F$ :	matrice nella teoria di laminazione.
$M$ :	matrice di anisotropia in plasticità, o momento esterno.
$M(D)$ :	operatore di danneggiamento.
$N$ :	numero di microfessure, o forza esterna.
$R_D$ :	parametro di incrudimento isotropo in danneggiamento.
$S$ :	matrice di cedevolezza.
$S_6^c$ :	soglia elastica al taglio.
$V$ :	volume.
$X_1, X_2, X$ :	rispettivamente, incrudimento lineare, non lineare, loro somma in plasticità.
$X_3$ :	cinetica lineare in viscoplasticità.
$\gamma_1, \delta_1, \delta_2$ :	parametri del materiale in plasticità.
$\varepsilon$ :	deformazione.
$\lambda$ :	moltiplicatore di Lagrange.
$\rho$ :	curvatura del piano medio del laminato.
$\sigma$ :	sforzo.
$\tau$ :	tempi di rilassamento.
$\varphi$ :	angolo di avvolgimento.
$\varphi^{*vp}$ :	potenziale viscoplastico.
$Y_{22}$ :	variabile interna associata al danneggiamento.
$Y_2^c$ :	valore di soglia del danneggiamento.
$\sim$ :	indica parametri in presenza di danneggiamento.
$\bar{\quad}$ :	indica un parametro calcolato negli assi del laminato.
$=$ :	indica un tensore.
$\underline{\quad}$ :	indica in vettore.
$\Delta$ :	indica una variazione.
$\mathcal{D}$ :	indica una derivata parziale.
$\bullet$ :	indica un incremento.
$e, p, t$ :	rispettivamente pedici per parametri elastici, plastici, totali intesi come somma di altri parametri.
$ve, vp$ :	rispettivamente pedici per parametri viscoelastici e viscoplastici.
$\langle \quad \rangle$ :	$\langle a \rangle = a$ se $a \geq 0$ , altrimenti $\langle a \rangle = 0$ .

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Lemaitre J., Chaboche L., "*Aspect phénoménologique de la rupture par endommagement*", Journal de Mécanique Appliquée, vol.2, no.3, (1978), pp. 317-364.
- [2] Ladeveze P., "*Sur la modélisation et le calcul des structures composites*", JNC6, AMAC, Paris, (1988), pp. 697-712.
- [3] Perreux D., Oytana C., "*Continuum damage mechanics for micro-cracked composites*", J. Comp. Eng., 3, (1993), pp. 115-22.
- [4] Perreux D., Thiebaud F., "*Damaged elastoplastic behaviour of  $[+\varphi, -\varphi]_n$  fibre reinforced composite laminates in biaxial loading*", Composite Science and Technology, 54, (1995), pp. 275-285.
- [5] Ikononopoulos G., Marchetti M., Perreux D., Thiebaud F., "*Damage presence and evolution in Glass-Fibre composites: an elastoplastic model*", Matec '96, (1996), pp. 143-148.
- [6] Goettsmann T., Hashin Z., Brull M.A., "*Effective elastic moduli of cracked fibre composites*", Advanced in Composite Materials, ICCM3, 1980, pp. 749-758.
- [7] Talreja R., "*Modelling of damage development in composite using internal variable concepts*", Damage Mechanics of Components, Proc. A.S.M.E. Winter annual meeting, New York, pp. 11-16.
- [8] Spencer J.M.A., "*The formulation of constitutive equations for anisotropic solids*", Mechanical Behaviour of Anisotropic Solids, ed. J.P. Boehler, Editions du CNRS, (1982).
- [9] Vaziri R., Olson M.D., Anderson D.L., "*A plasticity based constitutive model for fibre-reinforced composite laminates*", Journal of Composite Materials, vol.25, (1991), pp. 512-535.
- [10] Lou Y.C., Schapery R.A., "*Viscoelastic characterisation of linear fibre-reinforced plastics*", Journal of Composite Materials, vol.5, (1971), pp. 85-107.
- [11] Walrath D.E., "*Viscoelastic response of an unidirectional composite containing two viscoelastic constituents*", Experimental Mechanics, (1991), pp. 111-117.
- [12] Santini R., Oytana C., Perreux D., Delobelle P., "*Un modèle viscoplastique pour les composites stratifiés*", Compte rendu JNC9, Saint Etienne, 1994.
- [13] Jackson K.E., Kellas S., Morton J., "*Scale effects in the response and failure of fibre reinforced composite laminates loaded in tension and flexure*", Journal of Composite Materials, vol.26, no.18, (1992), pp. 2674-2704.