

SULL'IDENTIFICAZIONE DELLE COSTANTI ELASTICHE DI UN SOLIDO FESSURATO DI MATERIALE ORTOTROPO

W. M. Hasan*, A. Piva**, E. Viola*

* DISTART- Università di Bologna

Viale del Risorgimento 2 - 40136 Bologna

** Dipartimento di Fisica - Università di Bologna

Via Imerio 46 - 40126 Bologna

PAROLE CHIAVE: Identificazione, Statistica, Frattura.

SOMMARIO

Lo scopo del presente articolo è quello di identificare le costanti elastiche di un solido fessurato di materiale ortotropo, nell'ambito della metodologia di identificazione statistica-parametrica.

I dati pseudo-sperimentali sono forniti dalla misura degli spostamenti relativi (associati al Modo I di deformazione) tra le facce opposte di fessure disposte nei tre piani ortogonali $x-y$, $y-z$ e $x-z$.

Il metodo iterativo di identificazione statistica è basato su un approccio Bayesiano. Il carattere iterativo del metodo deriva dallo sviluppo in serie di Taylor, troncato al primo ordine, delle funzioni che esprimono la risposta del solido fessurato alla sollecitazione esterna, nell'intorno dei parametri a priori.

Considerando aleatori sia i parametri stimati a priori che quelli sperimentali, vengono definite le corrispondenti matrici di covarianza. Alcuni grafici illustrano la convergenza dei parametri stimati ai rispettivi valori esatti, nonché la convergenza degli spostamenti analitici a quelli sperimentali. Infine, viene mostrata l'efficacia di un coefficiente di confidenza per accelerare la convergenza del metodo proposto.

1. INTRODUZIONE

In questa nota viene utilizzato il metodo statistico per l'identificazione dei parametri elastici di un materiale ortotropo, sulla base della misura di spostamenti relativi fra le due facce di cracks presenti nel corpo. Le funzioni che rappresentano la risposta del solido fessurato all'azione della sollecitazione esterna sono fornite dalle espressioni degli spostamenti che si ricavano dagli sviluppi della nota [1] (cfr. App. B).

L'approccio di identificazione parametrica è stato largamente impiegato nel campo della Dinamica delle strutture [2-4]. Nell'ambito della Meccanica dei solidi, invece, i lavori prodotti al fine di identificare i parametri elastici di un materiale non sono numerosi. Tra questi lavori, giova ricordare quelli di Maniatty et al. e Schnur et al. [5-7]. I primi autori hanno stimato le trazioni e gli spostamenti sul contorno di un corpo elastico bi-dimensionale, utilizzando informazioni riguardanti gli spostamenti e le deformazioni di

un numero finito di punti all'interno del corpo stesso. I secondi, invece, hanno presentato un metodo per identificare la posizione e la dimensione di un'inclusione circolare in una matrice finita e per identificare le proprietà dell'inclusione e della matrice. Le informazioni sperimentali impiegate riguardano gli spostamenti misurati in un numero finito di punti del contorno.

Sono stati studiati anche i problemi numerici legati ai problemi inversi in elasticità. Zabaras et al. [8] hanno analizzato la soluzione di una classe di problemi inversi in elasticità lineare usando un metodo di regolarizzazione spaziale. L'algoritmo utilizzato è basato sull'analisi della sensitività e sulla minimizzazione ai minimi quadrati della differenza tra spostamenti misurati e calcolati. Maniatty et al. [9] hanno presentato una tecnica per stimare gli errori nella soluzione di problemi inversi in elasticità lineare.

Nell'ambito della Meccanica della Frattura, sono pochissimi i lavori apparsi per identificare i parametri elastici di un materiale, da informazioni derivanti dalla presenza di un crack. Tanuma [10], ad esempio, ha derivato una formula per calcolare lo spostamento relativo fra le due facce di un crack presente in un materiale anisotropo di dimensioni infinite. Inoltre, egli ha considerato il problema inverso formale della determinazione delle costanti elastiche dalla misura degli spostamenti sul crack.

2. DESCRIZIONE DELL'ALGORITMO DI STIMA

Si consideri un vettore

$$\mathbf{r} = (r_1 \quad r_2 \quad \dots \quad r_m)^T \quad (2.1)$$

di parametri incogniti r_i ($i = 1, 2, \dots, m$) da identificare e si indichi con

$$\mathbf{r}_a = (r_{1a} \quad r_{2a} \quad \dots \quad r_{ma})^T \quad (2.2)$$

il vettore che raccoglie le stime a priori dei corrispondenti parametri. I parametri incogniti r_{ia} (2.2) sono detti anche *analitici* o *iniziali*.

Sia $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{r})$ un vettore di funzioni regolari

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{r}) = [y_1(\mathbf{r}) \quad y_2(\mathbf{r}) \quad \dots \quad y_M(\mathbf{r})]^T \quad (2.3)$$

ciascuna delle quali risulta essere, in generale, dipendente da tutti i parametri (2.1).

Si indichi, poi, con

$$\mathbf{y}_s = (y_{1s} \quad y_{2s} \quad \dots \quad y_{Ms}) \quad (2.4)$$

un vettore di determinazioni sperimentali relative alle grandezze analitiche $y_i(\mathbf{r})$, per $i = 1, 2, \dots, M$.

Sviluppando le funzioni regolari $y_i(\mathbf{r})$ in serie di Taylor nell'intorno dei parametri fisici a priori, ed escludendo nello sviluppo i termini superiori al primo ordine, si ha

$$\mathbf{y}(\mathbf{r}) \approx \mathbf{y}(\mathbf{r}_a) + \left. \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{r}} \right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_a} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \quad (2.5)$$

È utile introdurre le posizioni

$$\mathbf{y}(\mathbf{r}_a) = \mathbf{y}_a \quad , \quad \Delta \mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{r}) - \mathbf{y}_a \quad , \quad \mathbf{S} = \left. \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{r}} \right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_a} \quad (2.6)$$

Il vettore Δy ha come componenti le differenze tra i valori veri e le determinazioni analitiche $y_i(\mathbf{r}_a)$ delle variabili (2.4) e (2.3).

La *matrice di sensitività* S è costituita dai valori delle derivate parziali, delle funzioni y_i ($i = 1, 2, \dots, M$) del vettore (2.3) rispetto ai parametri da identificare r_1, \dots, r_m , calcolate nel punto \mathbf{r}_a (2.2) appartenente ad un intorno opportunamente piccolo di \mathbf{r} .

Per le (2.6), la (2.5) diventa

$$\Delta y = S(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) = S \Delta \mathbf{r} \quad (2.7)$$

essendo

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_a \quad (2.8)$$

Nel corso del procedimento numerico, il vettore Δy al primo membro della (2.7) esprime gli scarti dai valori sperimentali y_{is} , assunti come veri, delle grandezze $y_i(\mathbf{r}_a)$ valutate in corrispondenza dei parametri fisici a priori. Detti scarti avvertono che i valori r_{ia} devono essere corretti fino ad ottenere la convergenza delle grandezze analitiche a quelle sperimentali.

Il vettore dei parametri corretti

$$\hat{\mathbf{r}} = (\hat{r}_1 \quad \hat{r}_2 \quad \dots \quad \hat{r}_m)^T \quad (2.9)$$

si ricava dalla relazione (2.7) e prende la forma

$$\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_a + \mathbf{H} \Delta y \quad (2.10)$$

Nella (2.10) il vettore \mathbf{r}_a raccoglie i parametri stimati alla i -esima iterazione, mentre $\hat{\mathbf{r}}$ denota la stima dei parametri alla $i+1$ -esima iterazione. La matrice \mathbf{H} , detta *stimatore*, verrà illustrata nel par. 3. Per quanto affermato in precedenza, la procedura di aggiornamento si sviluppa mediante la formula ricorrente

$$\mathbf{r}^{(i+1)} = \mathbf{r}^{(i)} + \mathbf{H} (\mathbf{y}_s - \mathbf{y}^{(i)}) \quad (2.11)$$

essendo $\mathbf{y}^{(i)}$ il vettore delle determinazioni corrispondenti ai parametri analitici alla i -esima iterazione. Quando $\mathbf{y}_s = \mathbf{y}^{(i)}$ i parametri fisici a priori $r_{1a}, r_{2a}, \dots, r_{ma}$ non devono essere ulteriormente aggiornati.

3. IDENTIFICAZIONE DEI PARAMETRI ELASTICI DI UN MATERIALE ORTOTROPO

Si supponga di voler identificare le nove costanti elastiche di un materiale ortotropo dalla misura degli spostamento nel Modo I nei piani $x-y$, $y-z$ e $z-x$.

Le funzioni che rappresentano il comportamento del solido contenente una fessura per volta disposta nei vari piani possono essere espresse, per il Modo I di deformazione ed in corrispondenza della mezzeria del crack, in termini delle costanti elastiche del materiale. Risulta

$$\Delta v^{(x-y)} = \frac{\frac{2Tz}{(C_{11} + C_{33})} \left[\frac{C_{33} + C_{11}^2 - C_{11}C_{33} + 2C_{11}C_{33}}{C_{11} + 2C_{11}C_{33}} - \sqrt{\frac{C_{33}}{C_{11}} + \frac{(-C_{11}^2 + C_{11}C_{33} - 2C_{11}C_{33})^2}{4C_{11}^2C_{33}^2}} \right]}{C_{33} \left[\sqrt{\frac{-C_{11}^2 + C_{11}C_{33} - 2C_{11}C_{33}}{2C_{11}C_{33}}} - \sqrt{\frac{C_{33}}{C_{11}} + \frac{(-C_{11}^2 + C_{11}C_{33} - 2C_{11}C_{33})^2}{2C_{11}^2C_{33}^2}} \right]} - \frac{\frac{2Tz}{(C_{11} + C_{33})} \left[\frac{C_{33} + C_{11}^2 - C_{11}C_{33} + 2C_{11}C_{33}}{C_{11} + 2C_{11}C_{33}} + \sqrt{\frac{C_{33}}{C_{11}} + \frac{(-C_{11}^2 + C_{11}C_{33} - 2C_{11}C_{33})^2}{4C_{11}^2C_{33}^2}} \right]}{C_{33} \left[\sqrt{\frac{-C_{11}^2 + C_{11}C_{33} - 2C_{11}C_{33}}{2C_{11}C_{33}}} + \sqrt{\frac{C_{33}}{C_{11}} + \frac{(-C_{11}^2 + C_{11}C_{33} - 2C_{11}C_{33})^2}{2C_{11}^2C_{33}^2}} \right]} \quad (3.1)$$

$$\Delta w^{(y-z)} = \frac{1 - \frac{2Ta}{(C_{22} + C_{44})} \left[\frac{C_{22} + C_{44} - C_{22}C_{44} + 2C_{22}C_{44}}{2C_{22}C_{44}} - \sqrt{\frac{C_{22} + (-C_{22}^2 + C_{22}C_{44} - 2C_{22}C_{44})^2}{4C_{22}^2C_{44}^2}} \right]}{C_{22} \left[\frac{C_{22} + C_{44} - C_{22}C_{44} + 2C_{22}C_{44}}{2C_{22}C_{44}} + \sqrt{\frac{C_{22} + (-C_{22}^2 + C_{22}C_{44} - 2C_{22}C_{44})^2}{4C_{22}^2C_{44}^2}} \right]} - \frac{1 - \frac{2Ta}{(C_{22} + C_{44})} \left[\frac{C_{22} + C_{44} - C_{22}C_{44} + 2C_{22}C_{44}}{2C_{22}C_{44}} + \sqrt{\frac{C_{22} + (-C_{22}^2 + C_{22}C_{44} - 2C_{22}C_{44})^2}{4C_{22}^2C_{44}^2}} \right]}{C_{22} \left[\frac{C_{22} + C_{44} - C_{22}C_{44} + 2C_{22}C_{44}}{2C_{22}C_{44}} - \sqrt{\frac{C_{22} + (-C_{22}^2 + C_{22}C_{44} - 2C_{22}C_{44})^2}{4C_{22}^2C_{44}^2}} \right]} \quad (3.2)$$

$$\Delta u^{(z-x)} = \frac{1 - \frac{2Ta}{(C_{11} + C_{33})} \left[\frac{C_{11} + C_{33} - C_{11}C_{33} + 2C_{11}C_{33}}{2C_{11}C_{33}} - \sqrt{\frac{C_{11} + (-C_{11}^2 + C_{11}C_{33} - 2C_{11}C_{33})^2}{4C_{11}^2C_{33}^2}} \right]}{C_{11} \left[\frac{C_{11} + C_{33} - C_{11}C_{33} + 2C_{11}C_{33}}{2C_{11}C_{33}} + \sqrt{\frac{C_{11} + (-C_{11}^2 + C_{11}C_{33} - 2C_{11}C_{33})^2}{4C_{11}^2C_{33}^2}} \right]} - \frac{1 - \frac{2Ta}{(C_{11} + C_{33})} \left[\frac{C_{11} + C_{33} - C_{11}C_{33} + 2C_{11}C_{33}}{2C_{11}C_{33}} + \sqrt{\frac{C_{11} + (-C_{11}^2 + C_{11}C_{33} - 2C_{11}C_{33})^2}{4C_{11}^2C_{33}^2}} \right]}{C_{11} \left[\frac{C_{11} + C_{33} - C_{11}C_{33} + 2C_{11}C_{33}}{2C_{11}C_{33}} - \sqrt{\frac{C_{11} + (-C_{11}^2 + C_{11}C_{33} - 2C_{11}C_{33})^2}{4C_{11}^2C_{33}^2}} \right]} \quad (3.3)$$

Nella (3.1) - (3.3) T denota lo sforzo di trazione applicato normalmente alla giacitura dei "cracks" mentre " a " rappresenta la semilunghezza della traccia della fessura sul piano ortogonale alla direzione secondo cui si sviluppa la dimensione infinita della fessura stessa.

Il vettore dei parametri da identificare è definito da

$$\mathbf{r} = (C_{11} \ C_{22} \ C_{33} \ C_{44} \ C_{55} \ C_{66} \ C_{12} \ C_{13} \ C_{23})^T \quad (3.4)$$

mentre il vettore dei dati sperimentali è

$$\mathbf{y}_s = (\Delta v_s^{(x-y)} \ \Delta w_s^{(y-z)} \ \Delta u_s^{(z-x)})^T \quad (3.5)$$

Dalle (3.1), (3.2) e (3.3) si osserva che le funzioni che rappresentano il comportamento del materiale dipendono da nove costanti elastiche. Pertanto, dette funzioni possono essere sviluppate in serie di Taylor, arrestando lo sviluppo ai termini del primo ordine

$$\begin{pmatrix} \Delta v_s^{(x-y)} \\ \Delta w_s^{(y-z)} \\ \Delta u_s^{(z-x)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta v^{(x-y)} \\ \Delta w^{(y-z)} \\ \Delta u^{(z-x)} \end{pmatrix}_i + \mathbf{S} (\mathbf{r}^{(i+1)} - \mathbf{r}^{(i)}) \quad , \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (3.6)$$

ove la matrice \mathbf{S} è data da

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\Delta v^{(x-y)})}{\partial \mathbf{r}} \\ \frac{\partial(\Delta w^{(y-z)})}{\partial \mathbf{r}} \\ \frac{\partial(\Delta u^{(z-x)})}{\partial \mathbf{r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\Delta v^{(x-y)})}{\partial C_{11}} & \frac{\partial(\Delta v^{(x-y)})}{\partial C_{22}} & \frac{\partial(\Delta v^{(x-y)})}{\partial C_{33}} & \frac{\partial(\Delta v^{(x-y)})}{\partial C_{44}} & \frac{\partial(\Delta v^{(x-y)})}{\partial C_{55}} & \frac{\partial(\Delta v^{(x-y)})}{\partial C_{66}} & \frac{\partial(\Delta v^{(x-y)})}{\partial C_{12}} & \frac{\partial(\Delta v^{(x-y)})}{\partial C_{13}} & \frac{\partial(\Delta v^{(x-y)})}{\partial C_{23}} \\ \frac{\partial(\Delta w^{(y-z)})}{\partial C_{11}} & \frac{\partial(\Delta w^{(y-z)})}{\partial C_{22}} & \frac{\partial(\Delta w^{(y-z)})}{\partial C_{33}} & \frac{\partial(\Delta w^{(y-z)})}{\partial C_{44}} & \frac{\partial(\Delta w^{(y-z)})}{\partial C_{55}} & \frac{\partial(\Delta w^{(y-z)})}{\partial C_{66}} & \frac{\partial(\Delta w^{(y-z)})}{\partial C_{12}} & \frac{\partial(\Delta w^{(y-z)})}{\partial C_{13}} & \frac{\partial(\Delta w^{(y-z)})}{\partial C_{23}} \\ \frac{\partial(\Delta u^{(z-x)})}{\partial C_{11}} & \frac{\partial(\Delta u^{(z-x)})}{\partial C_{22}} & \frac{\partial(\Delta u^{(z-x)})}{\partial C_{33}} & \frac{\partial(\Delta u^{(z-x)})}{\partial C_{44}} & \frac{\partial(\Delta u^{(z-x)})}{\partial C_{55}} & \frac{\partial(\Delta u^{(z-x)})}{\partial C_{66}} & \frac{\partial(\Delta u^{(z-x)})}{\partial C_{12}} & \frac{\partial(\Delta u^{(z-x)})}{\partial C_{13}} & \frac{\partial(\Delta u^{(z-x)})}{\partial C_{23}} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Conformemente alla (3.6) si ricava il vettore \mathbf{r}_{i+1} dei parametri stimati alla $(i+1)$ -esima iterazione

$$\mathbf{r}^{(i+1)} = \mathbf{r}^{(i)} + \mathbf{H} \begin{pmatrix} \left(\begin{matrix} \Delta v_s^{(x-y)} \\ \Delta w_s^{(y-z)} \\ \Delta u_s^{(z-x)} \end{matrix} \right) - \left(\begin{matrix} \Delta v^{(x-y)} \\ \Delta w^{(y-z)} \\ \Delta u^{(z-x)} \end{matrix} \right) \end{pmatrix}_i \quad (3.8)$$

ove la matrice \mathbf{H} è illustrata in Tab.1, in dipendenza della tecnica di stima adottata e del numero di dati sperimentali, raccolti nel vettore \mathbf{y}_s , rispetto a quelli da identificare [2].

Tab. 1 : Stimatore H per diverse tecniche di stima parametrica.

| Tecnica di stima | N. dati sperimentali M rispetto a quelli da identificare m | Stimatore H | Parametri misurati | Parametri |
|------------------------------|--|---|--------------------|----------------|
| Minimi quadrati | $M < m$ $M > m$ | $S^T (S^T S)^{-1} S^T$ $(S^T S)^{-1} S^T$ | deterministici | deterministici |
| Minimi quadrati pesati | $M < m$ $M > m$ | $S^T (S^T S)^{-1} S^T$ $(S^T D_{ee} S)^{-1} S^T D_{ee}$ | stocastici | deterministici |
| Identificazione statistica | $M < m$ $M > m$ | $(C_{rr}^{-1} + S^T C_{ee}^{-1} S)^{-1} S^T C_{ee}^{-1}$ $C_{rr} S^T (S C_{rr} S^T + C_{ee})^{-1}$ | stocastici | stocastici |
| Metodo statistico migliorato | $M < m$ oppure $M > m$ | $\beta^{-1} C_{rr} S^T (\beta^{-1} S C_{rr} S^T + C_{ee})^{-1}$ | stocastici | stocastici |

Nella Tab. 1 C_{ee} denota la matrice diagonale di covarianza degli errori sui parametri misurati, mentre C_{rr} è la matrice di covarianza dei parametri a priori. $D_{ee} = C_{ee}^{-1}$ è la matrice di peso (confidenza) dei parametri sperimentali, mentre β è un fattore di confidenza [2]. È da notare che, nel caso di una stima ai minimi quadrati pesati di un sistema sotto-determinato, le proprietà statistiche non hanno nessun effetto sul risultato finale.

4. RISULTATI E COMMENTI

Si supponga di voler identificare le costanti elastiche del Boron-Epoxy, riportate nella prima riga di Tab. 2, dalla misura degli spostamenti delle due facce del crack nel Modo I nei piani $x-y$, $y-z$ e $z-x$.

Effettuando un numero sufficiente di misure, si calcola la media ed il coefficiente di variazione delle misure stesse (Tab. 3)

Nella Tab. 2 sono riportati i valori esatti, le stime iniziali e finali delle costanti elastiche nonché i loro coefficienti di variazione a priori e a posteriori e l'errore di stima finale.

In Fig.1 è illustrata la convergenza dei coefficienti fuori diagonale C_{12} , C_{13} e C_{23} della matrice di rigidezza del materiale [1], mentre nella Fig. 2 è riportata la convergenza dei coefficienti della diagonale principale C_{11} , C_{22} , C_{33} , C_{44} , C_{55} e C_{66} . In Fig. 3 è mostrata la convergenza dei suddetti parametri attraverso la convergenza degli spostamenti analitici a quelli sperimentali.

Nelle Figg.1 - 3 è anche illustrata l'influenza del coefficiente di confidenza β sulla velocità di convergenza dei parametri.

Tab. 2 : Risultati numerici dell'identificazione delle nove costanti elastiche.

| Costante | C_{11} | C_{22} | C_{33} | C_{44} | C_{55} | C_{66} | C_{12} | C_{13} | C_{23} |
|---------------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Valori esatti (N/mm^2) | 210345 | 22298 | 22298 | 4137 | 10342 | 10342 | 7012 | 7012 | 5750 |
| Valori iniziali (N/mm^2) | 208000 | 20000 | 20000 | 3000 | 9000 | 9000 | 8000 | 8000 | 7000 |
| Errore iniziale % | 1.1 | 10.3 | 10.3 | 27.5 | 13 | 13 | 14.1 | 14.1 | 21.7 |
| Incertezza a priori | 0.0012 | 0.0015 | 0.0012 | 0.004 | 0.002 | 0.002 | 0.018 | 0.018 | 0.006 |
| Stime finali (N/mm^2) | 210870 | 22456 | 22429 | 4075 | 10286 | 10269 | 7128 | 7115 | 5517 |
| Errore finale % | 0.25 | 0.7 | 0.58 | 1.5 | 0.54 | 0.7 | 1.65 | 1.46 | 4 |
| Incertezza a posteriori | 0.0011 | 0.0009 | 0.00077 | 0.0013 | 0.001 | 0.0012 | 0.02 | 0.02 | 0.007 |

Tab. 3 : Valori medi sperimentali con le rispettive incertezze

| Dati sperimentali | Media delle misure (mm) | Coefficiente di variazione |
|----------------------|-------------------------|----------------------------|
| $\Delta v_s^{(x-y)}$ | 0.597 | 0.02 |
| $\Delta w_s^{(y-z)}$ | 0.981 | 0.02 |
| $\Delta u_s^{(z-x)}$ | 0.597 | 0.02 |

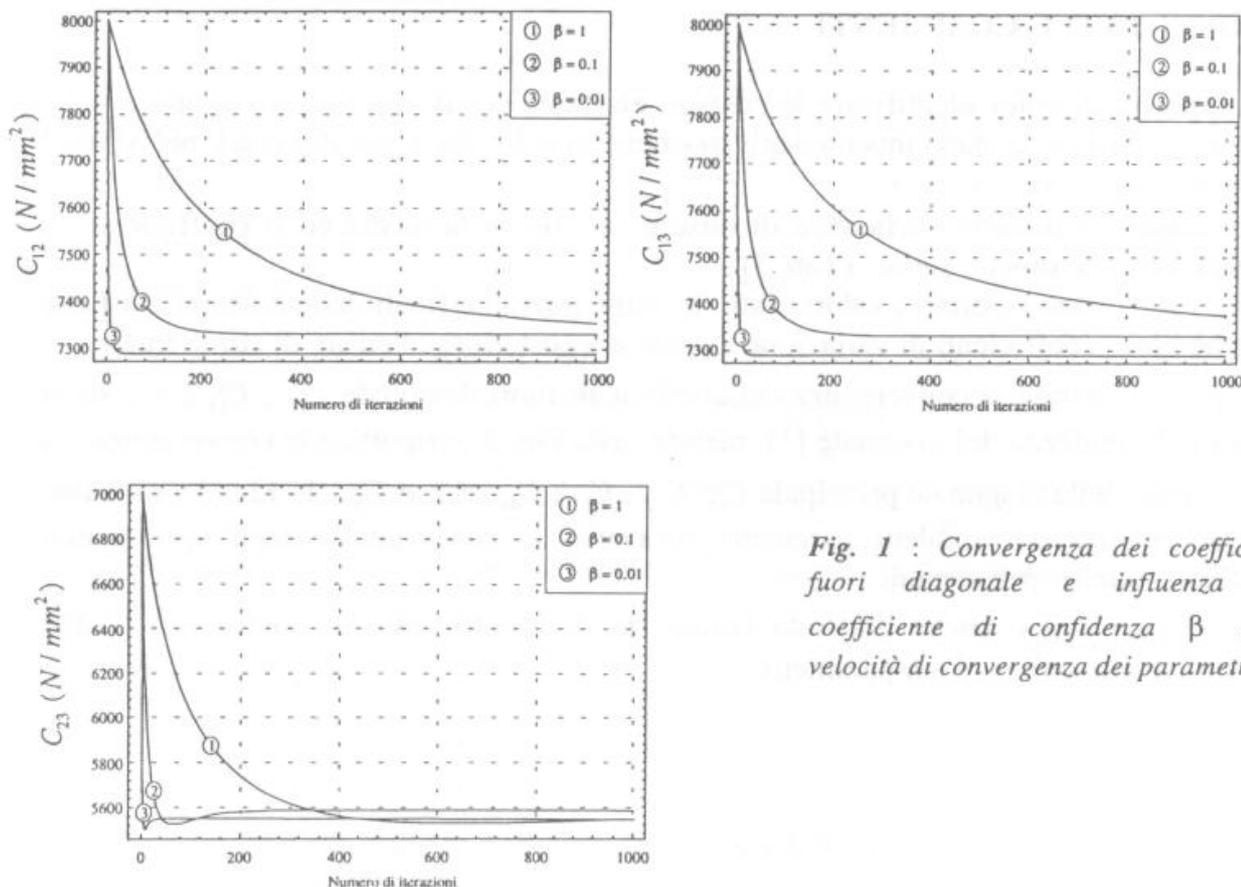


Fig. 1 : Convergenza dei coefficienti fuori diagonale e influenza del coefficiente di confidenza β sulla velocità di convergenza dei parametri.

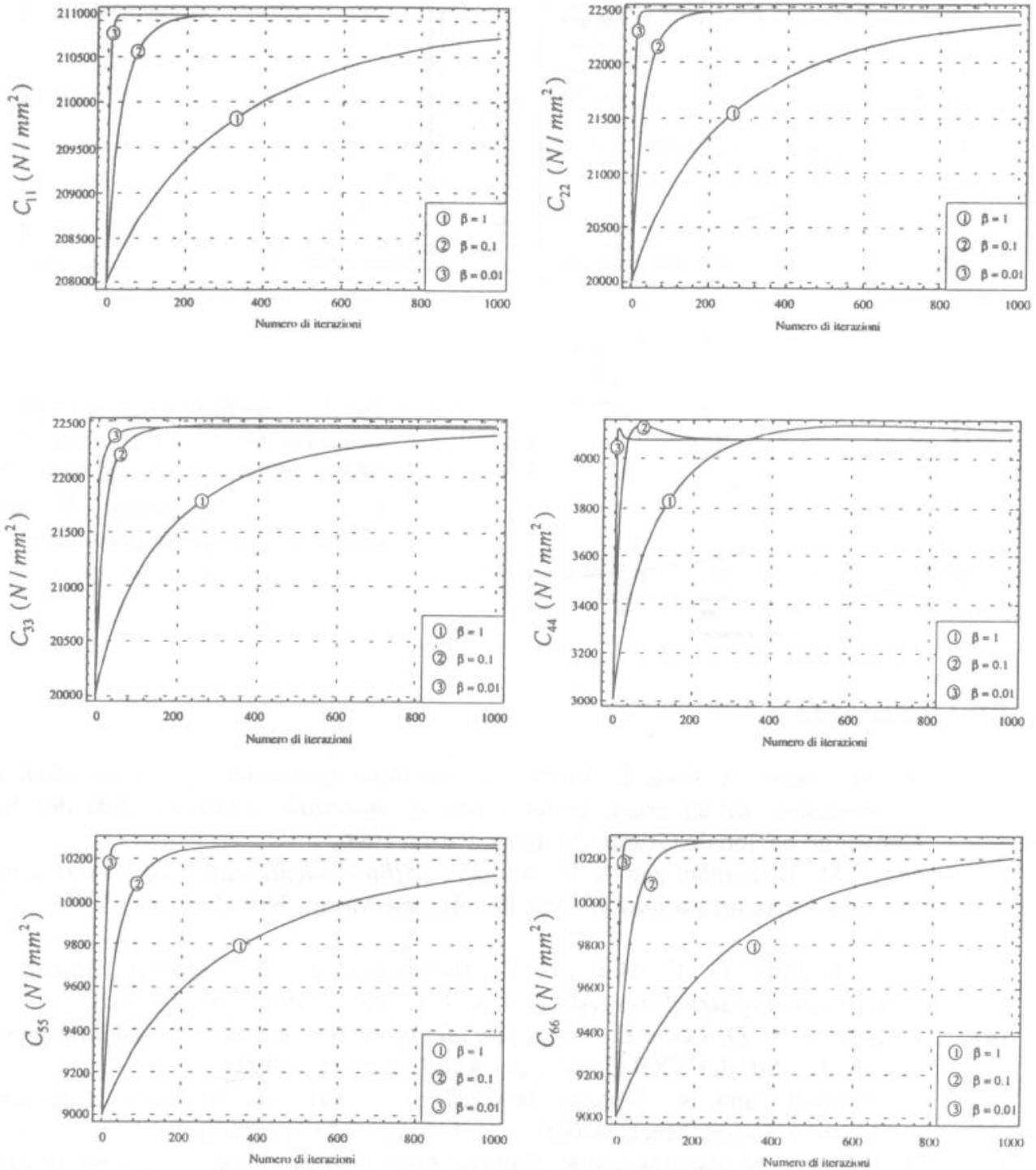


Fig. 2 : Convergenza dei coefficienti della diagonale principale e influenza del coefficiente β sulla velocità di convergenza dei parametri.

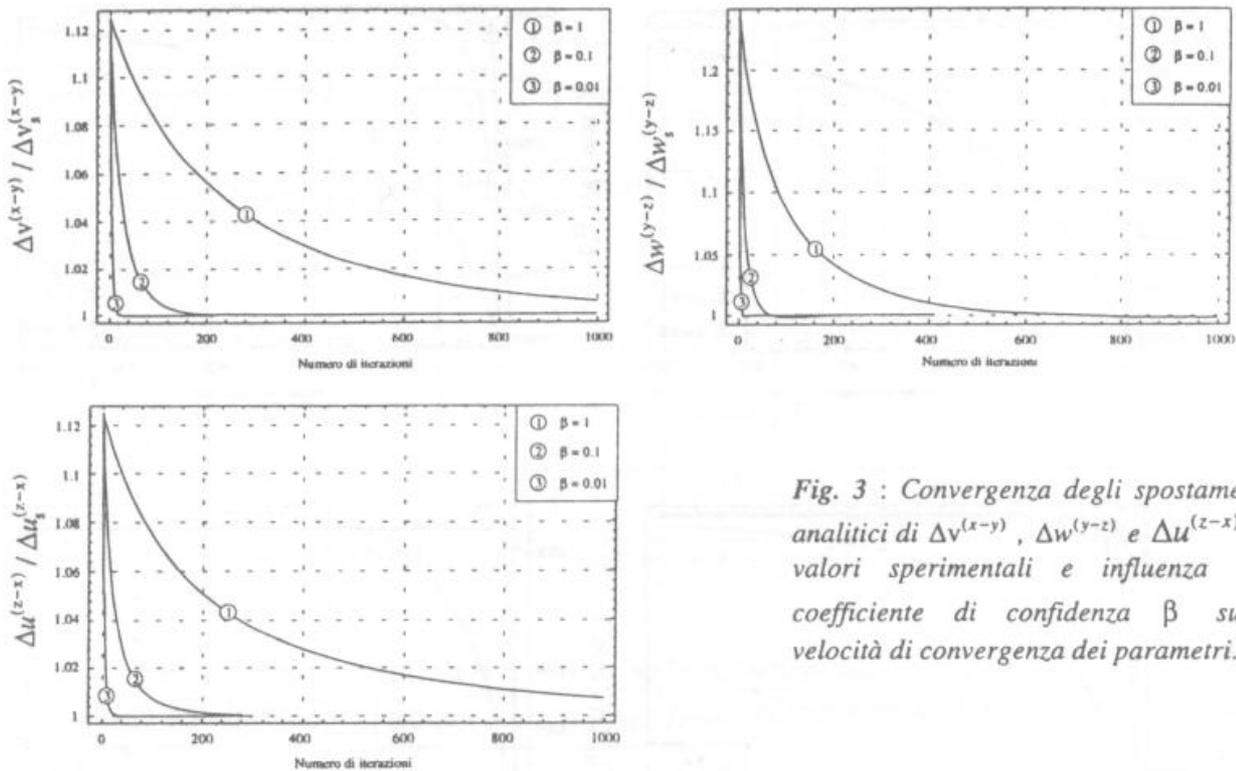


Fig. 3 : Convergenza degli spostamenti analitici di $\Delta v^{(x-y)}$, $\Delta w^{(y-z)}$ e $\Delta u^{(z-x)}$ ai valori sperimentali e influenza del coefficiente di confidenza β sulla velocità di convergenza dei parametri.

BIBLIOGRAFIA

- [1] W. M. Hasan, A. Piva, E. Viola, *Calcolo degli spostamenti per i tre Modi di deformazione di un crack in un solido di materiale ortotropo*, Atti del XII Convegno nazionale Gruppo Frattura, Parma 1996.
- [2] M. A. M. Torkamani and A. K. Ahmadi, *Stiffness identification of frames using simulated ground excitation*, ASCE J. Engng Mech., Vol. 114, No. 5, 753-776 (1988).
- [3] J. D. Collins, G. C. Hart, T. K. Hasselman and B. Kennedy, *Statistical identification of structures*, AIAA J. Vol. 12, No. 2, 185 - 190 (1974).
- [4] C. Bentini, A. Di Leo e E. Viola, *Sull'identificazione del danno mediante prove dinamiche*, Atti del XXII Conv. Naz. AIAS, 398-406 (1993).
- [5] A. Maniatty and N. Zabarar, *Method for solving inverse elastoviscoplastic problems*. J. Engng Mech. ASCE, Vol. 115, 2216-2231 (1989).
- [6] A. Maniatty, N. Zabarar and K. Stelson, *Finite element analysis of some inverse elasticity problems*. J. Engng Mech. ASCE, Vol. 115, 1303-1317 (1989).
- [7] D. S. Schnur and N. Zabarar, *An inverse method for determining elastic material properties and a material interface*. Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 33, 2039-2057 (1992).
- [8] N. Zabarar, V. Morellas and D. Schnur, *Spatially regularized solution of inverse elasticity problems using the BEM*. Commun. in Appl. Num. Meth., Vol. 5, 547-553 (1989).
- [9] A. Maniatty and N. Zabarar, *Investigation of regularization parameters and error estimating in inverse elasticity problems*. Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 37, 1039-1052 (1994).
- [10] K. Tanuma, *Relative displacements of the two sides of a plane crack*. J. of Elasticity, Vol. 36, 257-270, (1995).

Ringraziamento: Questo lavoro è stato effettuato con i fondi del M.U.R.S.T (40%).

APPENDICE A - Derivazione dell'algoritmo di stima

Si assuma che i parametri da identificare abbiano distribuzione normale con media

$$\mu_r = \mathcal{E}[r] = r_a \quad (1)$$

essendo \mathcal{E} l'operatore lineare di aspettazione, detto anche di media, dei valori attesi, o di speranza matematica. La matrice di covarianza dei parametri è data da

$$C_r = \mathcal{E}[(r - r_a)(r - r_a)^T] \quad (2)$$

Dalla (1) risulta nullo il valore atteso di Δr

$$\mu_{\Delta r} = \mathcal{E}[\Delta r] = \mathcal{E}[r - r_a] = 0 \quad (3)$$

mentre la matrice di covarianza di Δr assume l'aspetto

$$C_{(\Delta r)(\Delta r)} = \mathcal{E}[(\Delta r)(\Delta r)^T] = C_r \quad (4)$$

Se Δr è descritto da una distribuzione normale, allora lo è anche Δy in virtù della trasformazione lineare (2.7). Pertanto

$$\mu_{\Delta y} = \mathcal{E}[\Delta y] = 0 \quad (5)$$

e

$$C_{(\Delta y)(\Delta y)} = \mathcal{E}[(\Delta y)(\Delta y)^T] = \mathcal{E}[S(\Delta r)(\Delta r)^T S^T] = S C_r S^T \quad (6)$$

Per le (2.6) e (5) risulta

$$\mathcal{E}[y] = [y_a] \quad (7)$$

Per tenere conto degli errori relativi ai dati sperimentali, viene introdotto un vettore ε di media nulla e covarianza $C_{\varepsilon\varepsilon}$. Pertanto la (2.7) assume l'aspetto

$$\Delta y = S \Delta r + \varepsilon \quad (8)$$

Di conseguenza, la matrice di covarianza di Δy diventa

$$C_{(\Delta y)(\Delta y)} = \mathcal{E}[(\Delta y)(\Delta y)^T] = \mathcal{E}[(S \Delta r + \varepsilon)(S \Delta r + \varepsilon)^T] = S C_r S^T + C_{\varepsilon\varepsilon} \quad (9)$$

La covarianza di Δy e Δr è data da

$$C_{(\Delta y)(\Delta r)} = \mathcal{E}[(\Delta y)(\Delta r)^T] = \mathcal{E}[(S \Delta r + \varepsilon)(\Delta r)^T] = \mathcal{E}[S \Delta r (\Delta r)^T + \varepsilon (\Delta r)^T] = S C_{(\Delta r)(\Delta r)} = S C_r \quad (10)$$

L'obiettivo del procedimento di identificazione è quello di trovare uno stimatore lineare non distorto di Δr , basato su misure sperimentali e valori stimati a priori dei parametri r , tale che la stima $\Delta \hat{r}$ di Δr ammetta la rappresentazione

$$\Delta \hat{r} = G \Delta y \quad (11)$$

ove G è una matrice definita in modo da minimizzare la varianza della differenza fra i valori veri di Δr e i valori stimati $\Delta \hat{r}$. Pertanto, occorre minimizzare la seguente quantità

$$Q = \mathcal{E}[(\Delta \hat{r} - \Delta r)(\Delta \hat{r} - \Delta r)^T] \quad (12)$$

rispetto a G . Sostituendo la (11) nella (12) si ha

$$Q = \mathcal{E}[(G \Delta y - \Delta r)(G \Delta y - \Delta r)^T] = G C_{(\Delta y)(\Delta y)} G^T - G C_{(\Delta y)(\Delta r)} - C_{(\Delta y)(\Delta r)}^T G^T + C_{rr} \quad (13)$$

Dalla condizione di stazionarietà

$$\delta Q = 0 \quad (14)$$

risulta [3]

$$G = C_{(\Delta y)(\Delta r)}^T C_{(\Delta y)(\Delta y)}^{-1} \quad (15)$$

Per la (11) si ha

$$\Delta \hat{r} = C_{(\Delta y)(\Delta r)}^T C_{(\Delta y)(\Delta y)}^{-1} \Delta y \quad (16)$$

Sostituendo nella (16) le relazioni ricavate precedentemente consegue che

$$\hat{r} = r_o + C_{rr} S^T (S C_{rr} S^T + C_{ee})^{-1} \Delta y \quad (17)$$

poichè $r = \hat{r}$ allorchè è stata raggiunta la convergenza.

La matrice di covarianza a posteriori delle stime \hat{r} è data da

$$\begin{aligned} C_{\hat{r}\hat{r}} &= \mathcal{E}[(\Delta \hat{r} - \Delta r)(\Delta \hat{r} - \Delta r)^T] = C_{(\Delta r)(\Delta r)} - C_{(\Delta y)(\Delta r)}^T C_{(\Delta y)(\Delta y)}^{-1} C_{(\Delta y)(\Delta r)} \\ &= C_{rr} - C_{rr} S^T (S C_{rr} S^T + C_{ee})^{-1} S C_{rr} \end{aligned} \quad (18)$$

Appendice B: Espressioni degli spostamenti relativi tra le due facce delle fessure nei piani $x-y$, $y-z$ e $z-x$

$$\Delta v = v^+(x, 0) - v^-(x, 0) = \frac{2T}{C_{66}(p_2 - p_1)} \left[\frac{1}{l_4} - \frac{1}{l_3} \right] \sqrt{a^2 - x^2} \quad , \quad |x| < a \quad (1)$$

$$\Delta w = w^+(y, 0) - w^-(y, 0) = \frac{2T}{C_{44}(p_2 - p_1)} \left[\frac{1}{l_4} - \frac{1}{l_3} \right] \sqrt{a^2 - y^2} \quad , \quad |y| < a \quad (2)$$

$$\Delta u = u^+(z, 0) - u^-(z, 0) = \frac{2T}{C_{55}(p_2 - p_1)} \left[\frac{1}{l_4} - \frac{1}{l_3} \right] \sqrt{a^2 - z^2} \quad , \quad |z| < a \quad (3)$$

Nelle (1), (2) e (3) le costanti p_1 , p_2 , a_1 , a_2 , l_3 e l_4 assumono, rispettivamente, l'aspetto

$$p_1 = [a_1 - (a_1^2 - a_2^2)^{1/2}]^{1/2} \quad , \quad p_2 = [a_1 + (a_1^2 - a_2^2)^{1/2}]^{1/2} \quad , \quad 2a_1 = \alpha + \alpha_1 - 4\beta\beta_1 \quad ,$$

$$a_2 = \alpha\alpha_1 \quad , \quad l_3 = 1 - \frac{2\beta}{\alpha - p_1^2} \quad , \quad l_4 = 1 - \frac{2\beta}{\alpha - p_2^2}$$

ove

$$\alpha = \frac{C_{66}}{C_{11}} \quad , \quad \alpha_1 = \frac{C_{22}}{C_{66}} \quad , \quad 2\beta = \frac{C_{12} + C_{66}}{C_{11}} \quad , \quad 2\beta_1 = \frac{C_{12} + C_{66}}{C_{66}} \quad \text{per } \Delta v$$

$$\alpha = \frac{C_{44}}{C_{22}} \quad , \quad \alpha_1 = \frac{C_{33}}{C_{44}} \quad , \quad 2\beta = \frac{C_{23} + C_{44}}{C_{22}} \quad , \quad 2\beta_1 = \frac{C_{23} + C_{44}}{C_{44}} \quad \text{per } \Delta w$$

$$\alpha = \frac{C_{55}}{C_{11}} \quad , \quad \alpha_1 = \frac{C_{33}}{C_{55}} \quad , \quad 2\beta = \frac{C_{13} + C_{55}}{C_{11}} \quad , \quad 2\beta_1 = \frac{C_{13} + C_{55}}{C_{55}} \quad \text{per } \Delta u$$