

CALCOLO DEGLI SPOSTAMENTI PER I TRE MODI DI DEFORMAZIONE DI UN CRACK IN UN SOLIDO DI MATERIALE ORTOTROPO

W. M. Hasan*, A. Piva**, E. Viola*

* DISTART- Università di Bologna

Viale del Risorgimento 2 - 40136 Bologna

** Dipartimento di Fisica - Università di Bologna

Via Irnerio 46 - 40126 Bologna

PAROLE CHIAVE: Elasticità, Frattura, Potenziali complessi, Materiale ortotropo

SOMMARIO

Al fine di estendere alla Meccanica della Frattura elastica lineare i metodi di identificazione impiegati in altri settori dell'Ingegneria, in questa nota vengono ricavate le espressioni degli spostamenti per i tre modi di deformazione di un crack dominante presente in un solido di materiale elastico ortotropo.

Per il calcolo degli spostamenti viene utilizzato un metodo proposto dagli autori, che trasforma il sistema di equazioni differenziali del secondo ordine, che regge il problema dell'equilibrio elastico per il solido di materiale ortotropo, in un sistema differenziale di ordine ridotto.

I vari problemi al contorno associati agli stati di deformazione piana e antipiana sono formulati in termini di potenziali complessi e la loro soluzione è ricondotta a quella dei problemi di Hilbert

1. INTRODUZIONE

In questa nota viene affrontato il problema dell'equilibrio elastico per un solido di materiale ortotropo, contenente una fessura di lunghezza infinita e di larghezza $2a$. La sollecitazione è costituita da distribuzioni autoequilibrate ed uniformi di sforzi, agenti sulle facce opposte del crack.

Per il mezzo elastico ed ortotropo si assume come riferimento la terna cartesiana ortogonale $oxyz$, i cui piani sono paralleli alle tre giaciture principali del materiale.

La fessura è contenuta nel piano xz e la sua traccia sul piano xy è rappresentata dal segmento dell'asse x di lunghezza $2a$, centrato sull'origine del riferimento. La discontinuità di materia C_z , che si sviluppa secondo la direzione dell'asse z relativamente alla sua dimensione di lunghezza infinita, può rappresentarsi nel modo seguente:

$$C_z = \{(x, y, z) \in \mathfrak{R}^3 \mid -a \leq x \leq a, y = 0, z \in \mathfrak{R}\} \quad (1.1)$$

essendo \mathfrak{R} l'insieme dei numeri reali.

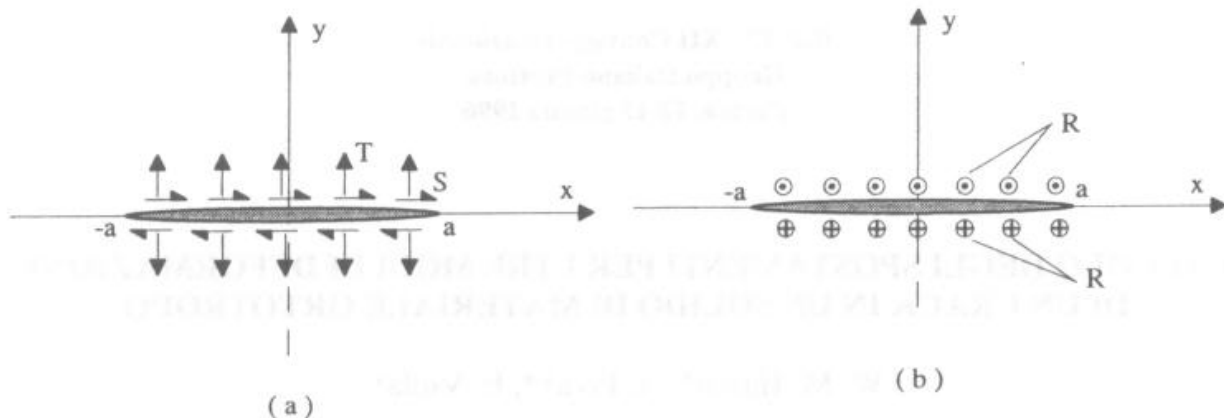


Fig. 1 : Stati di deformazione piana e antipiana nel piano $x - y$.

Gli sforzi di trazione T applicati normalmente al piano della giacitura del crack e gli sforzi S diretti parallelamente a detto piano (fig. 1.a) si suppongono agenti secondo lo stato di deformazione piana. Gli sforzi R , diretti parallelamente all'asse z (fig. 1.b), agiscono secondo lo stato di deformazione antipiana. In entrambi i casi il corpo è libero da tensioni all'infinito.

Le condizioni di carico assunte consentono di sfruttare le corrispondenti condizioni di simmetria e di antisimmetria verificate dal campo di spostamento.

Dette condizioni verranno impiegate per caratterizzare le proprietà dei potenziali complessi.

Come risulta dai par. successivi, nel presente lavoro sono risolti univocamente i tre problemi illustrati in fig. 1. In realtà, le nove costanti elastiche indipendenti che caratterizzano la matrice costitutiva del materiale ortotropo, riguardano ancora la soluzione di quattro problemi di stati di deformazione piana e due problemi di stati di deformazione antipiana. I problemi in parola sono relativi alle due configurazioni della superficie di discontinuità di materia, ciascuna delle quali costituisce un crack dominante, i cui sviluppi nelle direzioni delle dimensioni infinite si manifestano secondo gli assi x e y . Le due fessure dominanti hanno ampiezza $2a$ ed appartengono ai piani yz e xy , rispettivamente.

2. EQUAZIONI PER UN MATERIALE ORTOTROPO

2.1. Relazioni generali

Se si indicano con $\sigma = (\sigma_{ij})$, $\varepsilon = (\varepsilon_{ij})$ e $C = [C_{ij}]$, $i, j = 1, 2, 3$ rispettivamente il vettore delle componenti di tensione, il vettore delle componenti di deformazione e la matrice delle costanti elastiche, le equazioni costitutive per un materiale anisotropo si possono scrivere nella forma compatta

$$\sigma = C \varepsilon \quad (2.1)$$

ove, in dettaglio, rispetto ad una terna $O(x, y, z)$ cartesiana ortogonale, si ha

$$\sigma^T = (\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{yz} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{xy}) \quad , \quad \varepsilon^T = (\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{xy}) \quad (2.2)$$

Un materiale ortotropo ammette tre piani di simmetria elastica mutuamente ortogonali. Rispetto ad una terna Cartesiana i cui assi x, y, z coincidano con le direzioni principali del materiale, la matrice C dei coefficienti elastici assume l'aspetto

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix} \quad C_{ij} = C_{ji} \quad , \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.3)$$

Dalle (2.1) , (2.2) e (2.3) si ottengono le equazioni tensione - deformazione nella forma seguente [1] , [2]:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= C_{11} \varepsilon_x + C_{12} \varepsilon_y + C_{13} \varepsilon_z & , & \quad \tau_{yz} = C_{44} \gamma_{yz} \\ \sigma_y &= C_{21} \varepsilon_x + C_{22} \varepsilon_y + C_{23} \varepsilon_z & , & \quad \tau_{xz} = C_{55} \gamma_{xz} \\ \sigma_z &= C_{31} \varepsilon_x + C_{32} \varepsilon_y + C_{33} \varepsilon_z & , & \quad \tau_{xy} = C_{66} \gamma_{xy} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Esprimendo le componenti di deformazione in termini di componenti di spostamento u , v e w rispetto agli assi x , y e z , rispettivamente, le (2.4) assumono l'aspetto

$$\begin{aligned} \sigma_x &= C_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + C_{12} \frac{\partial v}{\partial y} + C_{13} \frac{\partial w}{\partial z} & , & \quad \tau_{yz} = C_{44} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \sigma_y &= C_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + C_{22} \frac{\partial v}{\partial y} + C_{23} \frac{\partial w}{\partial z} & , & \quad \tau_{xz} = C_{55} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \sigma_z &= C_{31} \frac{\partial u}{\partial x} + C_{32} \frac{\partial v}{\partial y} + C_{33} \frac{\partial w}{\partial z} & , & \quad \tau_{xy} = C_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Indicando con σ_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$ le componenti del tensore degli sforzi che intervengono nelle relazioni precedentemente scritte, le equazioni dell'equilibrio elastico si possono scrivere nella forma

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad , \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.6)$$

Le equazioni (2.6) verranno particolarizzate in seguito a seconda degli stati di deformazione che verranno presi in considerazione.

2.2. Stati di deformazione piana e antipiana

Per uno stato di deformazione piana, nel piano $x-y$, il campo di spostamento è espresso dalle seguenti funzioni

$$u = u(x, y) \quad , \quad v = v(x, y) \quad , \quad w = 0 \quad (2.7)$$

In virtù delle (2.7) le (2.5) assumono l'aspetto

$$\begin{aligned} \sigma_x &= C_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + C_{12} \frac{\partial v}{\partial y} & , & \quad \tau_{xy} = C_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \sigma_y &= C_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + C_{22} \frac{\partial v}{\partial y} & , & \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\sigma_z = C_1 \sigma_x + C_2 \sigma_y$$

ove le costanti C_1 e C_2 che compaiono nella terza delle (2.8) sono

$$C_1 = \frac{C_{13} C_{22} - C_{23} C_{12}}{C_{11} C_{22} - C_{12}^2}, \quad C_1 = \frac{C_{23} C_{11} - C_{13} C_{12}}{C_{11} C_{22} - C_{12}^2} \quad (2.9)$$

Per uno stato di deformazione antipiana nel piano $x-y$ e nella direzione dell'asse z , le componenti dello spostamento sono

$$u = v = 0, \quad w = w(x, y) \quad (2.10)$$

Le equazioni (2.5) assumono la forma seguente:

$$\tau_{xz} = C_{55} \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \tau_{yz} = C_{44} \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0 \quad (2.11)$$

3. COMPONENTI DI SPOSTAMENTO IN TERMINI DI POTENZIALI COMPLESSI

3.1. Stato di deformazione piana nel piano $x-y$

Per uno stato di deformazione piana nel piano $x-y$, le equazioni indefinite di equilibrio (2.6) assumono l'aspetto

$$C_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0, \quad C_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + C_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \quad (3.1)$$

in virtù delle (2.8), oppure

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\beta \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2\beta_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \alpha_1 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (3.2)$$

ove

$$\alpha = \frac{C_{66}}{C_{11}}, \quad \alpha_1 = \frac{C_{22}}{C_{66}}, \quad 2\beta = \frac{C_{12} + C_{66}}{C_{11}}, \quad 2\beta_1 = \frac{C_{12} + C_{66}}{C_{66}} \quad (3.3)$$

Dalle (3.3) risulta anche

$$\alpha \alpha_1 = \frac{C_{22}}{C_{11}}, \quad \frac{\beta_1}{\beta} = \frac{C_{11}}{C_{66}} = \frac{1}{\alpha}, \quad \alpha \beta_1 = \beta \quad (3.4)$$

Ponendo $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)^T \equiv \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right)^T$, il sistema (3.2) si può trasformare nel seguente sistema del primo ordine [3]-[8]:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + \mathbf{A} \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad (3.5)$$

ove

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 2\beta & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2\beta_1 & 0 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

L'equazione caratteristica della matrice (3.6) è

$$\lambda^4 + 2 a_1 \lambda^2 + a_2 = 0, \quad (3.7)$$

con

$$2a_1 = \alpha + \alpha_1 - 4\beta \beta_1, \quad a_2 = \alpha \alpha_1 \quad (3.8)$$

Assumendo

$$a_1 > 0, \quad a_1^2 > a_2 > 0 \quad (3.9)$$

si ottengono per la (3.6) i seguenti autovalori immaginari puri

$$\lambda_1 = \pm i p_1, \quad \lambda_2 = \pm i p_2, \quad (i^2 = -1) \quad (3.10)$$

con

$$p_1 = [a_1 - (a_1^2 - a_2)^{1/2}]^{1/2}, \quad p_2 = [a_1 + (a_1^2 - a_2)^{1/2}]^{1/2}, \quad (3.11)$$

costanti positive.

Gli autovettori della matrice (3.6) sono

$$h^{(1)} = \frac{1}{\alpha - p_1^2} \begin{pmatrix} 2\beta p_1^2 \\ i2\beta p_1 \\ -ip_1(\alpha - p_1^2) \\ \alpha - p_1^2 \end{pmatrix}, \quad h^{(2)} = \frac{1}{\alpha - p_2^2} \begin{pmatrix} 2\beta p_2^2 \\ i2\beta p_2 \\ -ip_2(\alpha - p_2^2) \\ \alpha - p_2^2 \end{pmatrix}, \quad h^{(3)} = \overline{h^{(1)}}, \quad h^{(4)} = \overline{h^{(2)}} \quad (3.12)$$

Esprimendo gli autovettori $h^{(1)}$ e $h^{(2)}$ nella forma

$$h^{(1)} = \operatorname{Re} h^{(1)} + i \operatorname{Im} h^{(1)} = e_2 + i e_1, \quad h^{(2)} = \operatorname{Re} h^{(2)} + i \operatorname{Im} h^{(2)} = e_4 + i e_3 \quad (3.13)$$

è possibile definire una matrice U che ha come colonne i vettori, ad elementi reali,

e_1, e_2, e_3, e_4 :

$$U = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2\beta p_1^2}{\alpha - p_1^2} & 0 & \frac{2\beta p_2^2}{\alpha - p_2^2} \\ \frac{2\beta p_1}{\alpha - p_1^2} & 0 & \frac{2\beta p_2}{\alpha - p_2^2} & 0 \\ -p_1 & 0 & -p_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

Per le (3.6) e (3.14) risulta verificata la relazione notevole

$$U^{-1} A U \equiv B = \begin{pmatrix} 0 & -p_1 & 0 & 0 \\ p_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p_2 \\ 0 & 0 & p_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

La trasformazione (3.15) insieme con la trasformazione invertibile

$$\phi(x, y) = U \psi(x, y) \quad (3.16)$$

permette di ridurre il sistema (3.5) alla forma

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + B \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad \psi \equiv (\psi_1 \quad \psi_2 \quad \psi_3 \quad \psi_4)^T \quad (3.17)$$

Il sistema (3.17) assume l'aspetto delle seguenti equazioni di Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x} = \frac{\partial \psi_2}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} = -\frac{\partial \psi_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial \psi_3}{\partial x} = \frac{\partial \psi_4}{\partial y_2}, \quad \frac{\partial \psi_3}{\partial y_2} = -\frac{\partial \psi_4}{\partial x} \quad (3.18)$$

per le funzione analitiche

$$\Omega_1(z_1) = \psi_1(x, y_1) + i \psi_2(x, y_1), \quad \Omega_2(z_2) = \psi_3(x, y_2) + i \psi_4(x, y_2) \quad (3.19)$$

delle variabili complesse

$$z_1 = x + i y_1, \quad y_1 = y/p_1, \quad z_2 = x + i y_2, \quad y_2 = y/p_2 \quad (3.20)$$

Sfruttando le (3.14) e (3.16) si ricavano gli elementi del vettore ϕ in funzione di quelli del vettore ψ

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2\beta p_1^2}{\alpha - p_1^2} \psi_2 + \frac{2\beta p_2^2}{\alpha - p_2^2} \psi_4, & \phi_3 &= \frac{\partial v}{\partial x} = -p_1 \psi_1 - p_2 \psi_3 \\ \phi_2 &= \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2\beta p_1}{\alpha - p_1^2} \psi_1 + \frac{2\beta p_2}{\alpha - p_2^2} \psi_3, & \phi_4 &= \frac{\partial v}{\partial y} = \psi_2 + \psi_4\end{aligned}\quad (3.21)$$

Per le (3.19), le (3.21) si possono scrivere nella forma seguente

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \frac{2\beta p_1^2}{\alpha - p_1^2} \text{Im} \Omega_1(z_1) + \frac{2\beta p_2^2}{\alpha - p_2^2} \text{Im} \Omega_2(z_2), & \phi_3 &= -p_1 \text{Re} \Omega_1(z_1) - p_2 \text{Re} \Omega_2(z_2) \\ \phi_2 &= \frac{2\beta p_1}{\alpha - p_1^2} \text{Re} \Omega_1(z_1) + \frac{2\beta p_2}{\alpha - p_2^2} \text{Re} \Omega_2(z_2), & \phi_4 &= \text{Im} \Omega_1(z_1) + \text{Im} \Omega_2(z_2)\end{aligned}\quad (3.22)$$

Sostituendo le (3.22) nelle (2.8) si ottengono le seguenti espressioni delle componenti di tensione in funzione dei potenziali complessi definiti dalle (3.19)

$$\sigma_x = C_{66} \text{Im}[l_1 \Omega_1(z_1) + l_2 \Omega_2(z_2)], \quad \tau_{xy} = -C_{66} \text{Re}[p_1 l_3 \Omega_1(z_1) + p_2 l_4 \Omega_2(z_2)] \quad (3.23)$$

$$\sigma_y = C_{66} \text{Im}[p_1^2 l_3 \Omega_1(z_1) + p_2^2 l_4 \Omega_2(z_2)]$$

ove valgono le seguenti notazioni

$$l_1 = \frac{2\beta p_1^2}{\alpha(\alpha - p_1^2)} + \frac{C_{12}}{C_{66}}, \quad l_3 = 1 - \frac{2\beta}{\alpha - p_1^2}, \quad l_2 = \frac{2\beta p_2^2}{\alpha(\alpha - p_2^2)} + \frac{C_{12}}{C_{66}}, \quad l_4 = 1 - \frac{2\beta}{\alpha - p_2^2} \quad (3.24)$$

Dalle (3.22) si ottiene

$$\phi_1 = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2\beta p_1^2}{\alpha - p_1^2} \left[\frac{\Omega_1(z_1) - \overline{\Omega_1(z_1)}}{2i} \right] + \frac{2\beta p_2^2}{\alpha - p_2^2} \left[\frac{\Omega_2(z_2) - \overline{\Omega_2(z_2)}}{2i} \right] \quad (3.25)$$

$$\phi_4 = \frac{\partial v}{\partial y} = \left[\frac{\Omega_1(z_1) - \overline{\Omega_1(z_1)}}{2i} \right] + \left[\frac{\Omega_2(z_2) - \overline{\Omega_2(z_2)}}{2i} \right] \quad (3.26)$$

Si definiscano le funzioni analitiche

$$\omega'_1(z_1) = \frac{d\omega_1}{dz_1} = \Omega_1(z_1), \quad \omega'_2(z_2) = \frac{d\omega_2}{dz_2} = \Omega_2(z_2) \quad (3.27)$$

In base alla loro analiticit , si pu  scrivere

$$\omega'_j(z_j) = \frac{\partial \omega_j}{\partial x} = \Omega_j(z_j), \quad j = 1, 2 \quad (3.28)$$

ed anche

$$\omega'_j(z_j) = \frac{\partial \omega_j}{\partial(iy_j)} = -i p_j \frac{\partial \omega_j}{\partial y} = \Omega_j(z_j), \quad j = 1, 2 \quad (3.29)$$

Dalle (3.28) e (3.29) si ottengono allora le seguenti rappresentazioni, equivalenti fra loro a meno di costanti arbitrarie, delle funzioni $\omega_j(z_j)$

$$\omega_j(z_j) = \int \Omega_j(z_j) dz_j = \int \Omega_j(z_j) dx = \frac{i}{p_j} \int \Omega_j(z_j) dy$$

$$\overline{\omega_j(z_j)} = \int \overline{\Omega_j(z_j)} d\bar{z}_j = \int \overline{\Omega_j(z_j)} dx = -\frac{i}{p_j} \int \overline{\Omega_j(z_j)} dy$$

Integrando le (3.25) e (3.26) e sfruttando le (3.30) si ottengono le componenti dello spostamento

$$u(x, y) = \frac{2\beta p_1^2}{\alpha - p_1^2} \text{Im} \omega_1(z_1) + \frac{2\beta p_2^2}{\alpha - p_2^2} \text{Im} \omega_2(z_2) \quad , \quad v(x, y) = -p_1 \text{Re} \omega_1(z_1) - p_2 \omega_2(z_2) \quad (3.31)$$

3.2. Stato di deformazione antipiana nel piano $x - y$ e nella direzione dell'asse z

Per uno stato di deformazione antipiana definito dalle (2.10) , le equazioni indefinite di equilibrio (2.6) si riducono alla seguente equazione

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \quad (3.32)$$

In virtù delle (2.11) la (3.32) diventa

$$C_{55} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + C_{44} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (3.33)$$

Ponendo $r = \sqrt{C_{44}/C_{55}}$, la (3.33) assume l'aspetto seguente

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y_1^2} = 0 \quad , \quad y_1 = y/r \quad (3.34)$$

L'equazione (3.34) esprime il fatto che la funzione $w(x, y_1)$ soddisfa l'equazione di Laplace, ovvero che è una funzione armonica. Quindi è esprimibile come la parte reale o immaginaria di una funzione analitica della variabile complessa $\zeta = x + i y_1$. Si può scrivere

$$w(x, y_1) = \frac{1}{C_{55}} \text{Re}[\omega(\zeta)] \quad (3.35)$$

Sfruttando la (3.35) le (2.11) danno

$$\tau_{xz} = \text{Re}[\omega'(\zeta)] = \text{Re} \Omega(\zeta) \quad , \quad \tau_{yz} = -r \text{Im}[\omega'(\zeta)] = -r \text{Im} \Omega(\zeta) \quad (3.36)$$

ove si è posto $\omega'(\zeta) = \Omega(\zeta)$. Dalle (3.36) si ottiene anche la relazione seguente

$$\tau_{xz} - \frac{i}{r} \tau_{yz} = \text{Re} \Omega(\zeta) + i \text{Im} \Omega(\zeta) = \Omega(\zeta) \quad (3.37)$$

La funzione spostamento si può esprimere, tramite la (3.35) , nella forma seguente

$$w(x, y) = \frac{1}{C_{55}} \text{Re} \int \Omega(\zeta) d\zeta \quad (3.38)$$

a meno di una costante arbitraria.

4. FORMULAZIONI DEI PROBLEMI PER UN CRACK GIACENTE SUL SEGMENTO $(-a, a)$ DELL'ASSE x

4.1. Problema piano con crack sottoposto a carico autoequilibrato $\sigma_y = -T$ (Modo I)

Il problema è simmetrico rispetto all'asse x e il problema ai valori al contorno si può formulare nel modo seguente

$$\sigma_y(x, 0) = -T \quad , \quad |x| < a \quad (4.1)$$

$$\tau_{xy}(x, 0) = 0 \quad , \quad |x| < \infty \quad (4.2)$$

$$v(x, 0) = 0 \quad , \quad |x| > a \quad (4.3)$$

La condizione (4.3) può essere sostituita dalla seguente

$$\frac{\partial v(x, 0)}{\partial x} = 0 \quad , \quad |x| > a \quad (4.4)$$

Oltre alle condizioni (4.1) , (4.2) e (4.4) occorre imporre la condizione $\sigma_{ij} \rightarrow 0$, $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$.

Tenendo conto delle simmetrie dei potenziali complessi, le condizioni al contorno (4.1), (4.2) e (4.4) assumono rispettivamente l'aspetto:

$$[p_1^2 l_3 \Omega_1 + p_2^2 l_4 \Omega_2]^+(x) + [p_1^2 l_3 \Omega_1 + p_2^2 l_4 \Omega_2]^-(x) = -\frac{2iT}{C_{66}} \quad , \quad |x| < a \quad (4.5)$$

$$[p_1 l_3 \Omega_1 + p_2 l_4 \Omega_2]^+(x) - [p_1 l_3 \Omega_1 + p_2 l_4 \Omega_2]^-(x) = 0 \quad , \quad |x| < \infty \quad (4.6)$$

$$[p_1 \Omega_1 + p_2 \Omega_2]^+(x) - [p_1 \Omega_1 + p_2 \Omega_2]^-(x) = 0 \quad , \quad |x| > a \quad (4.7)$$

ove i potenziali $\Omega_i(z_i)$ si devono annullare all'infinito in base alla condizione di tensioni nulle all'infinito. Dalla (4.5) , sfruttando le (4.6) e (4.7) risultano i due problemi di Hilbert

$$\Omega_1^+(x) + \Omega_1^-(x) = \frac{-2iT}{C_{66} p_1 l_3 (p_1 - p_2)} \quad , \quad |x| < a \quad (4.8)$$

$$\Omega_2^+(x) + \Omega_2^-(x) = \frac{2iT}{C_{66} p_2 l_4 (p_1 - p_2)} \quad , \quad |x| < a \quad (4.9)$$

per $\Omega_1(z_1)$ e $\Omega_2(z_2)$ che verranno risolti in seguito. Le funzioni $\Omega_1(z_1)$ e $\Omega_2(z_2)$ sono analitiche su tutto il piano complesso tagliato lungo il segmento $(-a, a)$.

4.2. Problema piano con crack sottoposto al carico autoequilibrato $\tau_{xy} = -S$ (Modo II)

Il problema è antisimmetrico rispetto all'asse x e il problema ai valori al contorno si può formulare come segue

$$\tau_{xy}(x, 0) = -S \quad , \quad |x| < a \quad (4.10)$$

$$\sigma_y(x, 0) = 0 \quad , \quad |x| < \infty \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 0 \quad , \quad |x| > a \quad (4.12)$$

Con la condizione $\sigma_{ij} \rightarrow 0$, $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$.

La funzione $\partial u(x, y)/\partial x$ in termini dei potenziali complessi assume l'aspetto

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \text{Im} \left[\frac{2\beta p_1^2}{\alpha - p_1^2} \Omega_1(z_1) + \frac{2\beta p_2^2}{\alpha - p_2^2} \Omega_2(z_2) \right] \quad (4.13)$$

Le condizioni al contorno (4.10) - (4.12) possono esprimersi nella forma

$$[p_1 l_3 \Omega_1 + p_2 l_4 \Omega_2]^+(x) + [p_1 l_3 \Omega_1 + p_2 l_4 \Omega_2]^-(x) = \frac{2S}{C_{66}} \quad , \quad |x| < a \quad (4.14)$$

$$[p_1^2 l_3 \Omega_1 + p_2^2 l_4 \Omega_2]^+(x) - [p_1^2 l_3 \Omega_1 + p_2^2 l_4 \Omega_2]^-(x) = 0 \quad , \quad |x| < \infty \quad (4.15)$$

$$\left[\frac{2\beta p_1^2}{\alpha - p_1^2} \Omega_1 + \frac{2\beta p_2^2}{\alpha - p_2^2} \Omega_2 \right]^+ - \left[\frac{2\beta p_1^2}{\alpha - p_1^2} \Omega_1 + \frac{2\beta p_2^2}{\alpha - p_2^2} \Omega_2 \right]^- = 0 \quad , \quad |x| > a \quad (4.16)$$

Per le (4.15) e (4.16) la (4.14) fornisce i seguenti problemi di Hilbert per le funzioni $\Omega_1(z_1)$ e $\Omega_2(z_2)$

$$\Omega_1^+(x) + \Omega_1^-(x) = \frac{2p_2 S}{C_{66} p_1 l_3 (p_2 - p_1)} \quad , \quad |x| < a \quad (4.17)$$

$$\Omega_2^+(x) + \Omega_2^-(x) = -\frac{2p_1 S}{C_{66} p_2 l_4 (p_2 - p_1)} \quad , \quad |x| < a \quad (4.18)$$

4.3. Problema antipiano con crack sottoposto a carico autoequilibrato $\tau_{xz} = -R$ (Modo III)

Il problema è antisimmetrico rispetto all'asse x e le condizioni al contorno si possono esprimere nel modo seguente

$$\tau_{yz}(x, 0) = -R \quad , \quad |x| < a \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial w(x, 0)}{\partial x} = 0 \quad , \quad |x| > a \quad (4.20)$$

Valgono inoltre le condizioni $(\tau_{xz} , \tau_{yz}) \rightarrow 0 \quad , \quad x^2 + y^2 \rightarrow \infty$.

Sfruttando le (3.36) e la (3.35) le condizioni al contorno (4.19) e (4.20) assumono rispettivamente la forma seguente

$$\text{Im} \Omega^+(x) = \frac{R}{r} \quad , \quad |x| < a \quad (4.21)$$

$$\text{Re} \Omega^+(x) = 0 \quad , \quad |x| < a \quad (4.22)$$

ovvero

$$\Omega^+(x) + \Omega^-(x) = 2i \frac{R}{r} \quad , \quad |x| < a \quad (4.23)$$

$$\Omega^+(x) - \Omega^-(x) = 0 \quad , \quad |x| > a \quad (4.24)$$

La (4.24) implica che il potenziale $\Omega(\zeta)$ si prolunga analiticamente attraverso l'asse x , esternamente al segmento $(-a, a)$ e quindi è una funzione analitica su tutto il piano complesso tagliato lungo tale segmento.

L'equazione (4.23) è un problema di Hilbert la cui soluzione sotto la condizione $\Omega(\zeta) \rightarrow 0$, $|\zeta| \rightarrow \infty$, permette di risolvere il problema antipiano formulato.

5. SOLUZIONI DEI PROBLEMI AL CONTORNO

5.1. Espressioni dei potenziali complessi

Le soluzioni dei problemi ai valori al contorno formulati nei 4.1 - 4.3 si riducono alle soluzioni dei seguenti problemi di Hilbert

$$\Omega_j^+ + \Omega_j^- = f_j, \quad j=1,2, \quad |x| < a \quad (5.1)$$

ove

$$f_1 = -\frac{2iT}{C_{66} p_1 l_3(p_1 - p_2)}, \quad f_2 = \frac{2iT}{C_{66} p_2 l_4(p_1 - p_2)}, \quad |x| < a \quad (5.2)$$

$$f_1 = -\frac{2p_2 S}{C_{66} p_1 l_3(p_1 - p_2)}, \quad f_2 = \frac{2p_1 S}{C_{66} p_2 l_4(p_1 - p_2)}, \quad |x| < a \quad (5.3)$$

nel Modo I e nel Modo II, rispettivamente.

Per il Modo III, la soluzione del problema ai valori al contorno, formulato al punto 4.3, si riduce alla soluzione del seguente problema di Hilbert, formalmente uguale ai problemi (5.1), per l'unico potenziale $\Omega(z)$:

$$\Omega^+(x) + \Omega^-(x) = 2i \frac{R}{r}, \quad |x| < a \quad (5.4)$$

Le soluzioni generali dei problemi (5.1), nulle all'infinito, sono

$$\Omega_j(z_j) = \frac{1}{2\pi X(z_j)} \int_{-a}^a \frac{f_j X^+(t) dt}{t - z_j}, \quad j=1,2 \quad (5.5)$$

ove $X(z_j) = \sqrt{z_j^2 - a^2}$, $j=1,2$, sono le funzioni di Plemelj del problema. Tali funzioni, soddisfano le seguenti condizioni

$$\frac{X(z_j)}{z_j} \xrightarrow{|z_j| \rightarrow \infty} 1 \quad (5.6)$$

$$X^+(t) = -X^-(t) = i\sqrt{a^2 - t^2}, \quad |t| < a$$

$$X^+(t) = X^-(t) = \sqrt{t^2 - a^2}, \quad t > a \quad (5.7)$$

$$X^+(t) = X^-(t) = -\sqrt{t^2 - a^2}, \quad t < -a$$

Integrando la (5.5) si ottiene

$$\Omega_j(z_j) = \frac{f_j}{2} \left(1 - \frac{z_j}{X(z_j)} \right) \quad (5.8)$$

Sostituendo nella (5.8) le espressioni appropriate di f_j si ricavano i seguenti potenziali:

$$\Omega_1(z_1) = -\frac{iT}{C_{66} p_1 l_3(p_1 - p_2)} \left[1 - \frac{z_1}{X(z_1)} \right], \quad \Omega_2(z_2) = \frac{iT}{C_{66} p_2 l_4(p_1 - p_2)} \left[1 - \frac{z_2}{X(z_2)} \right] \quad (5.9)$$

$$\Omega_1(z_1) = -\frac{p_2 S}{C_{66} p_1 l_3 (p_1 - p_2)} \left[1 - \frac{z_1}{X(z_1)} \right], \quad \Omega_2(z_2) = \frac{p_1 S}{C_{66} p_2 l_4 (p_1 - p_2)} \left[1 - \frac{z_2}{X(z_2)} \right] \quad (5.10)$$

nel *Modo I* e nel *Modo II*, rispettivamente.

La soluzione del problema (5.4) è

$$\Omega(\zeta) = i \frac{R}{r} \left[1 - \frac{\zeta}{X(\zeta)} \right] \quad (5.11)$$

Integrando le (5.8) si ottiene, a meno di una costante complessa arbitraria

$$\omega_j(z_j) = \frac{f_j}{2} G(z_j) \quad (5.12)$$

con $G(z_j) = z_j - \sqrt{z_j^2 - a^2}$, $j = 1, 2$. Allora dalle (5.9)-(5.10) si ottengono i seguenti potenziali:

$$\omega_1(z_1) = -\frac{i T}{C_{66} p_1 l_3 (p_1 - p_2)} G(z_1), \quad \omega_2(z_2) = \frac{i T}{C_{66} p_2 l_4 (p_1 - p_2)} G(z_2) \quad (5.13)$$

$$\omega_1(z_1) = -\frac{p_2 S}{C_{66} p_1 l_3 (p_1 - p_2)} G(z_1), \quad \omega_2(z_2) = \frac{p_1 S}{C_{66} p_2 l_4 (p_1 - p_2)} G(z_2) \quad (5.14)$$

per il *Modo I* e il *Modo II*, rispettivamente. Dalla (5.11) si ottiene

$$\omega(\zeta) = i \frac{R}{r} G(\zeta) \quad (5.15)$$

per il *Modo III*, con $G(\zeta) = \zeta - \sqrt{\zeta^2 - a^2}$.

5.2. Campi di spostamento per i Modi I, II e III

Sostituendo le (5.13) e (5.14) nelle (3.31) si ricavano le espressioni degli spostamenti *Modo I*:

$$u(x, y) = \frac{T}{C_{66} (p_1 - p_2)} \left[\frac{2\beta p_2}{l_4 (\alpha - p_2^2)} \operatorname{Re} G(z_2) - \frac{2\beta p_1}{l_3 (\alpha - p_1^2)} \operatorname{Re} G(z_1) \right] \quad (5.16)$$

$$v(x, y) = \frac{T}{C_{66} (p_1 - p_2)} \left[\frac{1}{l_4} \operatorname{Im} G(z_2) - \frac{1}{l_3} \operatorname{Im} G(z_1) \right]$$

Modo II:

$$u(x, y) = \frac{S}{C_{66} (p_1 - p_2)} \left[\frac{2\beta p_1 p_2}{l_4} \operatorname{Im} G(z_2) - \frac{2\beta p_1 p_2}{l_3} \operatorname{Im} G(z_1) \right] \quad (5.17)$$

$$v(x, y) = \frac{S}{C_{66} (p_1 - p_2)} \left[\frac{p_2}{l_3} \operatorname{Re} G(z_1) - \frac{p_1}{l_4} \operatorname{Re} G(z_2) \right]$$

Sostituendo la (5.15) nella (3.35) si ottiene lo spostamento nel *Modo III*

$$w(x, y) = -\frac{R}{r C_{55}} \operatorname{Im} G(\zeta) \quad (5.18)$$

6. CALCOLO DEGLI SPOSTAMENTI SULLA GIACITURA DEL CRACK.

Le funzioni $G(z_j)$, $j = 1, 2$ assumono i seguenti valori, sull'asse x

$$G(z_j) = G(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x^2 - a^2} & , x > a \\ x + \sqrt{x^2 - a^2} & , x < -a \\ G^\pm(x) = x \mp i \sqrt{a^2 - x^2} & , |x| < a \quad , y = 0^\pm \end{cases} \quad (6.1)$$

Ricavando le parti reale ed immaginaria di $G(z_j)$ e sostituendo nelle (5.16) e (5.17) si ottengono le seguenti espressioni degli spostamenti lungo l'asse x .
Per il *Modo I* si ha:

$$u(x, 0) = \frac{2\beta T}{C_{66}(p_1 - p_2)} \left[\frac{p_2}{l_4(\alpha - p_2^2)} - \frac{p_1}{l_3(\alpha - p_1^2)} \right] \cdot \begin{cases} (x - \sqrt{x^2 - a^2}) & , x > a \\ (x + \sqrt{x^2 - a^2}) & , x < -a \\ (x) & , |x| < a \end{cases} \quad (6.2)$$

$$v(x, 0) = \frac{T}{C_{66}(p_1 - p_2)} \left[\frac{1}{l_4} - \frac{1}{l_3} \right] \cdot \begin{cases} 0 & , |x| > a \\ (\mp \sqrt{a^2 - x^2}) & , |x| < a \quad , y = 0^\pm \end{cases} \quad (6.3)$$

Dalla (6.3) si ricava la discontinuità dello spostamento sul crack

$$\Delta v = v^+(x, 0) - v^-(x, 0) = \frac{2T}{C_{66}(p_2 - p_1)} \left[\frac{1}{l_4} - \frac{1}{l_3} \right] \sqrt{a^2 - x^2} \quad , |x| < a \quad (6.4)$$

Per il *Modo II* risulta:

$$u(x, 0) = \frac{2\beta p_1 p_2 S}{C_{66}(p_1 - p_2)} \left[\frac{1}{l_4} - \frac{1}{l_3} \right] \cdot \begin{cases} 0 & , |x| > a \\ (\mp \sqrt{a^2 - x^2}) & , |x| < a \quad , y = 0^\pm \end{cases} \quad (6.5)$$

$$v(x, 0) = \frac{S}{C_{66}(p_1 - p_2)} \left[\frac{p_2}{l_3} - \frac{p_1}{l_4} \right] \cdot \begin{cases} (x - \sqrt{x^2 - a^2}) & , x > a \\ (x + \sqrt{x^2 - a^2}) & , x < -a \\ (x) & , |x| < a \end{cases} \quad (6.6)$$

Dalla (6.5) si ottiene la seguente discontinuità dello spostamento sul crack

$$\Delta u = u^+(x, 0) - u^-(x, 0) = \frac{4\beta p_1 p_2 S}{C_{66}(p_2 - p_1)} \left[\frac{1}{l_4} - \frac{1}{l_3} \right] \sqrt{a^2 - x^2} \quad , |x| < a \quad (6.7)$$

Per il *Modo III*, dalla (5.18) risulta

$$w(x, 0) = -\frac{R}{r C_{55}} \cdot \begin{cases} 0 & , |x| > a \\ (\mp \sqrt{a^2 - x^2}) & , |x| < a \quad , y = 0^\pm \end{cases} \quad (6.8)$$

quindi la discontinuità del spostamento sul crack è

$$\Delta w = w^+(x, 0) - w^-(x, 0) = \frac{2R}{r C_{55}} \sqrt{a^2 - x^2} \quad , \quad |x| < a \quad (6.9)$$

Ringraziamento: Questo lavoro è stato effettuato con i fondi del M.U.R.S.T (40%).

BIBLIOGRAFIA

- [1] N. I. Muskhelishvili, *Some basic problems in the mathematical theory of elasticity*, Noordhoff, Gröningen (1953).
- [2] S. G. Lekhnitskii, *Theory of elasticity of an anisotropic elastic body*, Min Publishers-Moscow (1981).
- [3] E. Viola, A. Piva, *Effect of orthotropy on elastodynamic crack behaviour*, Atti del VIII Congresso AIMETA, Torino 1986, Vol. I, 155-158.
- [4] A. Piva, *An Alternative Approach to Elastodynamic Crack Problems in an Orthotropic Medium*, Quarterly J. Appl. Math., Vol. 45, 97-104 (1987).
- [5] A. Piva and E. Viola, *Crack Propagation in an Orthotropic Medium*, Engng Fract. Mech., Vol. 29, 535-548 (1988).
- [6] A. Piva, E. Viola, *Sulla formulazione delle equazioni dell'elasticità piana mediante i Potenziali complessi*. Nota Tecnica n. 132, A.A. 92 / 93, Istituto di Scienza delle Costruzioni, Facoltà di Ingegneria, Università di Bologna.
- [7] E. Viola, A. Piva e W. Hasan, *Metodi analitici per la soluzione di problemi al contorno in elasticità piana*, Parte I, Integrali di tipo Cauchy e trasformazioni conformi, Nota tecnica n. 142, Istituto di Scienza delle Costruzioni, Università di Bologna (1995).
- [8] A. Piva, W. Hasan, *Effect of orthotropy on the intersonic shear crack propagation*, In corso di pubblicazione sulla rivista ASME, J. App. Mech.