

MODELLI ANALITICI
PER LA DESCRIZIONE DI PROVE
DI FRATTURA ELASTICA-LINEARE.

A. Corigliano, S. Mariani

Dipartimento di Ingegneria Strutturale
Politecnico di Milano.
P.za Leonardo da Vinci 32 - 20133 Milano.

PAROLE CHIAVE : Meccanica della Frattura Elastica Lineare, Provini di Frattura, Propagazione, Instabilità.

SOMMARIO.

Vengono proposti modelli semplificati di tipo analitico per la descrizione del comportamento a frattura di provini *standard*. Tali modelli sono basati sulla conoscenza della cedevolezza elastica $C(\alpha)$ dei provini in funzione della profondità dell'intaglio α . Mediante la funzione $C(\alpha)$, applicando nozioni di Meccanica della Frattura Elastica Lineare, è possibile determinare, nel corso della fase di propagazione della fessura, la curva carico-spostamento in forma parametrica e le condizioni di propagazione stabile in controllo di carico o di spostamento. Per la deduzione analitica della funzione di cedevolezza $C(\alpha)$ si introduce una nozione di *propagazione equivalente* in senso energetico della fessura, rappresentata da una sua espansione. Tale approccio, accompagnato dall'utilizzo della teoria delle travi, permette di esprimere $dC(\alpha)/d\alpha$ in termini di grandezze note e di una funzione della profondità dell'intaglio che viene determinata a partire dai valori limite del fattore di intensificazione degli sforzi per i due casi estremi di intagli superficiali ($\alpha \rightarrow 0$) e profondi ($\alpha \rightarrow 1$).

I modelli proposti vengono confrontati con simulazioni ottenute mediante analisi ad elementi finiti.

1. INTRODUZIONE.

La caratterizzazione del comportamento a frattura dei materiali è in genere ottenuta sperimentalmente da elementi strutturali di geometria semplice, identificando i valori dei parametri utilizzati per stabilire le condizioni di criticità della fessura ($K_c, G_c, J_c \dots$) sia in fase di innesco che durante la propagazione, validando nel contempo i modelli per la simulazione numerica [1,2].

Nel presente lavoro si propone un metodo per l'ottenimento di modelli semplificati, utilizzabili per l'analisi di prove standard quali la prova di flessione a tre punti (3PB) e la prova di trazione con singolo intaglio (SENT).

Lo studio viene condotto con riferimento a materiali fragili, in condizioni di piccole deformazioni e spostamenti. Si assumono inoltre le seguenti restrizioni: si considerano provini prismatici a base rettangolare, il cui comportamento flessionale ed assiale viene descritto con la teoria delle travi di Eulero-Bernoulli; le condizioni di carico ed appoggio vengono schematizzate mediante forze e vincoli concentrati; le fessure si propagano lungo l'altezza del provino in direzione rettilinea, in condizioni di modo I, mantenendo la simmetria iniziale.

La trattazione proposta si basa sulla conoscenza della cedevolezza elastica $C(\alpha)$ in funzione della profondità della fessura $\alpha \equiv a/W$, dove a è la lunghezza di fessura e W l'altezza del provino. A partire dalla funzione $C(\alpha)$ si ottiene una descrizione analitica completa del comportamento globale del provino, utilizzabile per l'identificazione di parametri caratteristici del processo di frattura [3,4].

2. BASI TEORICHE.

Come detto nell'introduzione, la trattazione proposta è basata sulla conoscenza della funzione cedevolezza elastica $C(\alpha)$ dei provini esaminati. Questa può essere ottenuta facilmente, applicando la teoria delle travi di Eulero-Bernoulli, per la classe di provini nella quale la fessura si propaga in direzione longitudinale [3,4]. Per la classe di provini considerata nel presente lavoro la determinazione della funzione $C(\alpha)$ non può essere unicamente basata sulla teoria delle travi. Infatti la fessura si propaga in una sezione trasversale e l'influenza della lunghezza di fessura sul valore della cedevolezza non può essere apprezzata attraverso un modello di trave in cui le variabili spaziali relative al piano della sezione stessa non compaiono.

La soluzione qui adottata è basata su di una ipotesi di equivalenza in senso energetico fra l'allungamento della fessura ed una sua espansione, secondo una reinterpretazione proposta da Bažant [5] dell'approccio utilizzato da Kienzler ed Herrmann [6,7] per lo studio di travi con fessure.

La presenza di una fessura in un elemento strutturale è associata ad un rilascio dell'energia di deformazione elastica in un volume ad essa circostante, delimitato dalle cosiddette linee di diffusione degli sforzi [2], ipotizzate nei casi in studio rettilinee e con una inclinazione rispetto alla direzione di propagazione definita dal parametro $\beta(\alpha)$. L'energia rilasciata durante il processo di propagazione infinitesima da della fessura proviene dalla zona tratteggiata in fig. 1a. Da un punto di vista energetico la propagazione della fessura può essere considerata equivalente ad una espansione infinitesima $d\lambda$ (fig. 1b), qualora $d\lambda$ venga determinato imponendo l'equivalenza delle aree nelle quali viene rilasciata l'energia elastica nei due casi (tratteggiate nelle fig. 1a e 1b). Trascurando il triangolo 567 di fig. 1a (infinitesimo del secondo ordine), dette aree sono uguali se vale la relazione :

$$\frac{d\lambda}{2} = \beta da \quad (1)$$

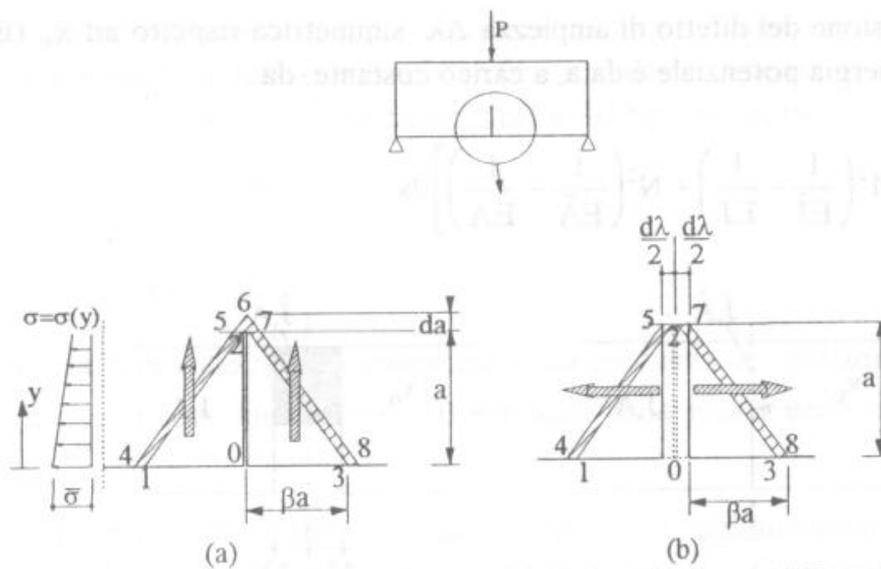


Fig. 1. Rappresentazione schematica delle linee di diffusione di sforzo e dell'area in cui viene rilasciata energia elastica. a) propagazione da; b) espansione dλ.

Nei provini qui esaminati, di sezione rettangolare e soggetti ad un carico concentrato P, l'energia potenziale Π può essere espressa, facendo ricorso al teorema di Clapeyron per strutture elastiche lineari, come :

$$\Pi = -\frac{1}{2} P s = -\frac{1}{2} C(\alpha) P^2 \quad (2)$$

dove s è la componente di spostamento del punto caricato nella direzione del carico P. In base alla relazione di equivalenza energetica (1) ed all'espressione dell'energia potenziale (2) si ricava :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a} = -\frac{P^2}{2W} \frac{dC}{d\alpha} = 2\beta \frac{\partial \Pi}{\partial \lambda} \quad (3)$$

Al fine di determinare l'espressione analitica della funzione $dC/d\alpha$ a partire dal valore dell'energia potenziale rilasciata in conseguenza di un'espansione infinitesima $d\lambda$ della fessura ($\partial \Pi / \partial \lambda$) e dalla funzione $\beta(\alpha)$, viene applicata la teoria delle travi di Eulero-Bernoulli. E' opportuno osservare che in questa trattazione semplificata la variazione locale del regime tensionale indotta dalla presenza della fessura, impercettibile in un modello di trave alla Eulero-Bernoulli, interviene tramite la funzione $\beta(\alpha)$.

In questo ambito, l'energia potenziale per una trave lunga L, utilizzando ancora il teorema di Clapeyron, può essere espressa come segue:

$$\Pi = -\frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{M^2}{EJ} + \frac{N^2}{EA} \right) dx \quad (4)$$

Nell'equazione (4) EJ ed EA sono le rigidzze flessionale ed assiale della trave; E è il modulo di Young del materiale; J ed A sono il momento di inerzia e l'area della sezione; M ed N il momento flettente e l'azione assiale.

Si consideri una trave con una fessura in corrispondenza della sezione di ascissa x_0 (fig. 2a); il momento di inerzia e l'area in questa sezione siano rispettivamente \hat{J} e \hat{A} . A

seguito di un'espansione del difetto di ampiezza $\Delta\lambda$, simmetrica rispetto ad x_0 (fig. 2b), la variazione dell'energia potenziale è data, a carico costante, da:

$$\Delta\Pi = -\frac{1}{2} \int_{x_0 - \frac{\Delta\lambda}{2}}^{x_0 + \frac{\Delta\lambda}{2}} \left[M^2 \left(\frac{1}{E\hat{J}} - \frac{1}{EJ} \right) + N^2 \left(\frac{1}{E\hat{A}} - \frac{1}{EA} \right) \right] dx \quad (5)$$

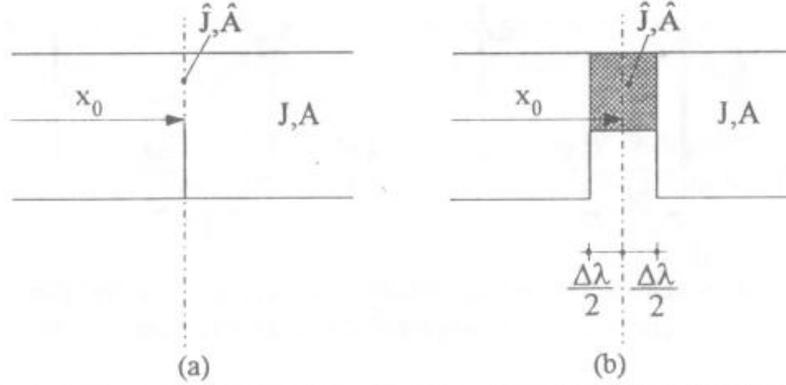


Fig. 2. Fessura in corrispondenza della sezione di ascissa x_0 , prima (a) e dopo (b) l'espansione $\Delta\lambda$.

Applicando il teorema della media all'integrale nell'eq. (5) e calcolando il limite per $\Delta\lambda \rightarrow 0$, si ottiene:

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\lambda} = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{\Delta\Pi}{\Delta\lambda} = -\frac{1}{2} \left[M^2(x_0) \left(\frac{1}{E\hat{J}} - \frac{1}{EJ} \right) + N^2(x_0) \left(\frac{1}{E\hat{A}} - \frac{1}{EA} \right) \right] \quad (6)$$

dove $M(x_0)$, $N(x_0)$ sono momento flettente ed azione assiale valutati nella sezione di ascissa x_0 .

Introducendo la (6) nell'eq. (3), si ottiene la seguente espressione per la derivata della cedevolezza elastica $dC/d\alpha$:

$$\frac{dC}{d\alpha} = \frac{2W\beta}{EP^2} \left[M^2(x_0) \left(\frac{1}{\hat{J}} - \frac{1}{J} \right) + N^2(x_0) \left(\frac{1}{\hat{A}} - \frac{1}{A} \right) \right] \quad (7)$$

Il fattore di intensificazione degli sforzi K_I è dunque legato a $\beta(\alpha)$, in base alle equazioni (3b) e (7), tramite la seguente relazione:

$$K_I = \sqrt{E^*G} = \sqrt{-E^* \frac{1}{B} \frac{\partial\Pi}{\partial a}} = \sqrt{\frac{E^*\beta}{EB} \left[M^2(x_0) \left(\frac{1}{\hat{J}} - \frac{1}{J} \right) + N^2(x_0) \left(\frac{1}{\hat{A}} - \frac{1}{A} \right) \right]} \quad (8)$$

Nella (8) $E^* = E$ per stati piani di sforzo, $E^* = E/(1-\nu^2)$ per stati piani di deformazione, con ν coefficiente di Poisson.

Per una trave di sezione rettangolare, il calcolo di \hat{J} e \hat{A} in funzione di α è immediato; $M(x_0)$ e $N(x_0)$ vengono determinati dalle condizioni di equilibrio caratteristiche della prova esaminata. Di conseguenza, considerando $\beta(\alpha)$ appartenente ad una classe di funzioni definita a meno di un certo numero di parametri, il membro di destra della (8) può essere sviluppato in serie di Taylor intorno ai valori $\alpha = 0$ ed $\alpha = 1$. I parametri incogniti che compaiono nella funzione $\beta(\alpha)$ vengono quindi determinati

imponendo la coincidenza dell'approssimazione al primo ordine di K_I con i valori noti nelle situazioni limite di fessure superficiali ($\alpha \rightarrow 0$) e profonde ($\alpha \rightarrow 1$) [8].

L'espressione assunta per la funzione $\beta(\alpha)$ è del tipo proposto in [9], dipendente dai quattro parametri d_1, d_2, d_3, d_4 :

$$\beta(\alpha) = d_1(1-\alpha)^{d_2} + d_3\alpha^{d_4} \quad (9)$$

Nota $\beta(\alpha)$, la cedevolezza può essere calcolata mediante integrazione della equazione (7), con la condizione limite $C(\alpha=0)$ ottenuta dalla teoria delle travi in assenza di difetto.

In base al criterio di Griffith per materiali fragili, il raggiungimento della situazione critica di propagazione è rappresentato dalla relazione $G = G_c = \text{costante}$. Utilizzando tale condizione di criticità, dalla relazione che lega G alla cedevolezza elastica è possibile ottenere la curva carico-spostamento nel corso della fase di propagazione:

$$P = \sqrt{\frac{2BWG_c}{dC/d\alpha}}; \quad s = CP = C\sqrt{\frac{2BWG_c}{dC/d\alpha}} \quad (10)$$

Le equazioni (10) costituiscono una rappresentazione parametrica della curva carico-spostamento, in cui il parametro è la profondità di fessura α .

In questo ambito le condizioni di stabilità del processo di frattura possono essere ottenute calcolando le derivate di G rispetto alla profondità di fessura α . In controllo di carico la propagazione è stabile quando $dG/d\alpha$ a carico P costante è non positiva; in controllo di spostamento la stabilità è garantita quando $dG/d\alpha$ a spostamento s costante è non positiva:

$$\left. \frac{dG}{d\alpha} \right|_P = \frac{P^2}{2BW} \frac{d^2C}{d\alpha^2} \leq 0; \quad \left. \frac{dG}{d\alpha} \right|_s = \frac{s^2}{2BWC^2} \left(\frac{d^2C}{d\alpha^2} - 2 \left(\frac{dC}{d\alpha} \right)^2 \frac{1}{C} \right) \leq 0 \quad (11)$$

3. PROVINO DI FLESSIONE A TRE PUNTI (3PB).

La procedura descritta nella sezione 2 porta alla seguente espressione analitica della cedevolezza elastica del provino di flessione a tre punti 3PB (fig. 3):

$$C(\alpha) = \frac{L^3}{4EBW^3} + \frac{3}{2} \frac{L^2}{EBW^2} \left[-\frac{d_1}{d_2-2} \left[(1-\alpha)^{d_2-2} - 1 \right] + 0.6586 \left[\frac{1}{(1-\alpha)^2} - 1 \right] + \right. \\ \left. + \frac{d_1}{d_2+1} \left[(1-\alpha)^{d_2+1} - 1 \right] - 1.3172\alpha \right] \quad (12)$$

dove :

$$d_1 = \left[1.1215 \left(1 - 0.17255 \frac{W}{L} \right) \right]^2 \pi - 1.3172$$

$$d_2 = \frac{2 \left[1.1215 \sqrt{\pi} \left(1 - 0.17255 \frac{W}{L} \right) \right] \left[1.1215 \sqrt{\pi} \left(1 - 0.17255 \frac{W}{L} \right) + 0.68286 \left(2 + 1.3473 \frac{W}{L} \right) \right]}{d_1}$$

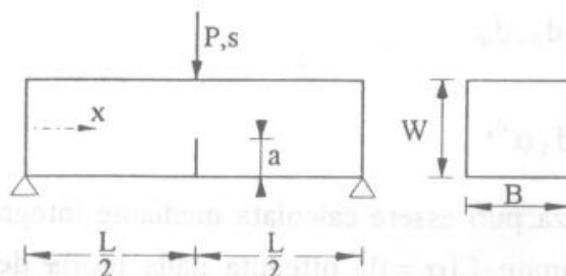


Fig. 3. Provino di flessione a tre punti 3PB.

La soluzione ottenuta per questo sistema è caratterizzata dall'influenza del carico concentrato applicato in corrispondenza della sezione nella quale la fessura si propaga. Infatti, in situazione di intaglio superficiale, il valore di K_1 dipende dalla tensione σ , normale alla direzione di propagazione, agente sulla fibra estrema di superficie ($\bar{\sigma}$ in fig. 1) e dalla variazione $d\sigma/dy$ rispetto alla stessa direzione [8]. Nella relazione (12) si è tenuto conto della distribuzione $\sigma = \sigma(y)$, causata dal carico concentrato, facendo uso della soluzione di Seewald del problema elastico in oggetto [10]. Nella situazione opposta di intaglio profondo la soluzione limite è invece indipendente dalla causa che genera lo stato tensionale presente all'apice della fessura [8,10].

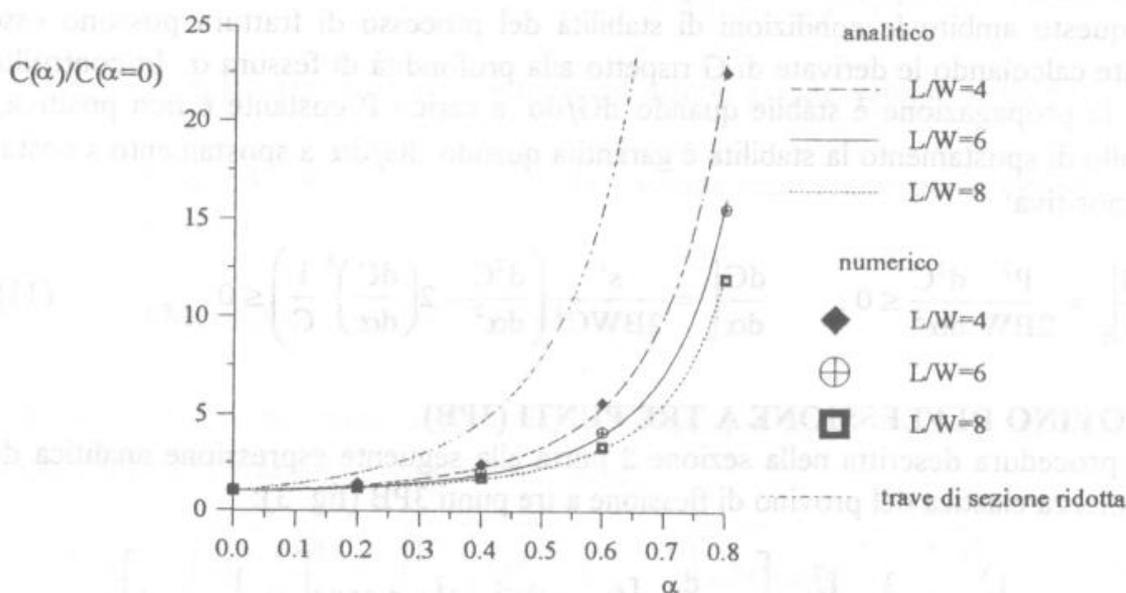


Fig. 4. Incremento della cedevolezza elastica in funzione della profondità della fessura. $B=10$ mm; $W=100$ mm.

L'espressione analitica della cedevolezza data dall'eq. (12) viene confrontata in fig. 4, al variare del rapporto L/W , con i risultati di una serie di analisi elastiche ad elementi finiti eseguite in condizioni di stato piano di sforzo con una mesh regolare avente 50 elementi di tipo ISOP4 sull'altezza del provino. Il comportamento elastico del materiale è definito dalle costanti $E=30000$ N/mm², $\nu=0.15$. Nella figura 4 è inoltre riportata la curva rappresentante l'andamento della cedevolezza attribuendo a tutta la trave il momento di inerzia ridotto \hat{J} : $C(\alpha)/C(\alpha=0) = 1/(1-\alpha)^3$. La buona corrispondenza fra i valori analitici e quelli numerici riscontrata in fig. 4 autorizza l'uso dell'espressione (12)

della cedevolezza per la deduzione della curva carico-spostamento (eq. 10) e per lo studio delle condizioni teoriche di stabilità della propagazione (eq. 11).

Durante la fase di propagazione, governata dalla condizione $G = G_c = \text{costante}$, la curva carico-spostamento assume un andamento ad *iperbole*, con gli asintoti rappresentati dalle rette per l'origine con pendenze corrispondenti alle rigidità iniziale (provino integro) e finale (provino completamente fessurato, con rigidità nulla). All'aumentare di G_c la curva di propagazione si allontana dall'origine (fig. 5).

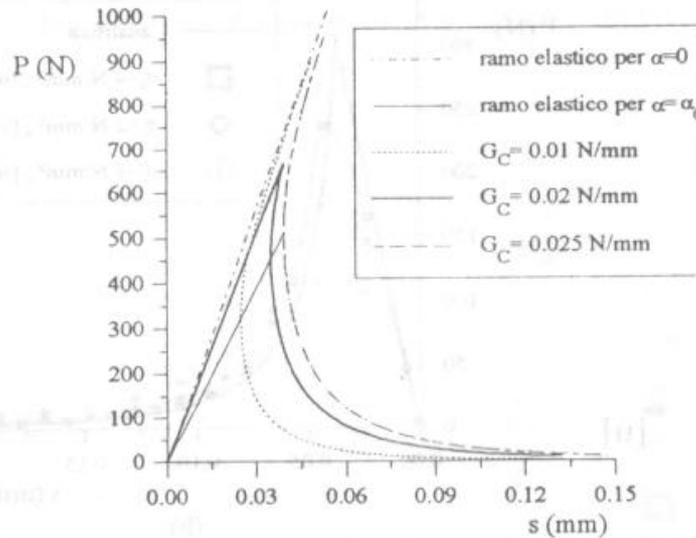


Fig. 5. Curve carico-spostamento. $B=10$ mm; $W=100$ mm; $L=400$ mm.

A riguardo delle condizioni di stabilità, come evidenziato dal grafico di fig. 4, la derivata seconda della cedevolezza non risulta mai negativa; la condizione (11a) non è pertanto mai soddisfatta e la propagazione della fessura in controllo di carico è sempre instabile.

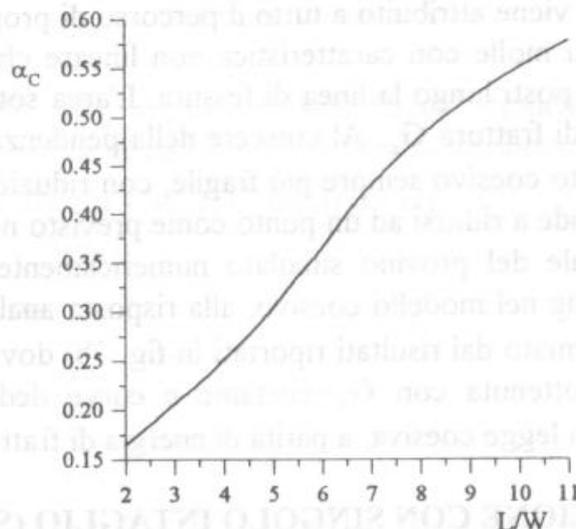


Fig. 6. Condizioni di stabilità in controllo di spostamento. Profondità critica α_c in funzione della snellezza L/W . $B=10$ mm; $W=100$ mm.

In controllo di spostamento il comportamento, governato dalla condizione (11b), è in una prima fase instabile e quindi stabile dopo un valore *critico* α_c . Tale comportamento si riflette nella forma del diagramma carico-spostamento (fig. 5), che presenta un primo tratto con ritorno indietro (*snap-back*) fino al punto corrispondente ad una profondità di fessura $\alpha = \alpha_c$ ed un secondo con andamento decrescente. Il diagramma di fig. 6

rappresenta l'andamento della profondità critica di fessura α_c al variare del rapporto di snellezza della trave L/W . Dalla figura si può dedurre che all'aumentare di L/W , il fenomeno di snap-back tende ad accentuarsi.

I risultati analitici sopra discussi sono messi a confronto in fig. 7 con quelli ottenuti da simulazioni numeriche dell'intero processo di fessurazione, eseguite mediante un programma ad elementi finiti.

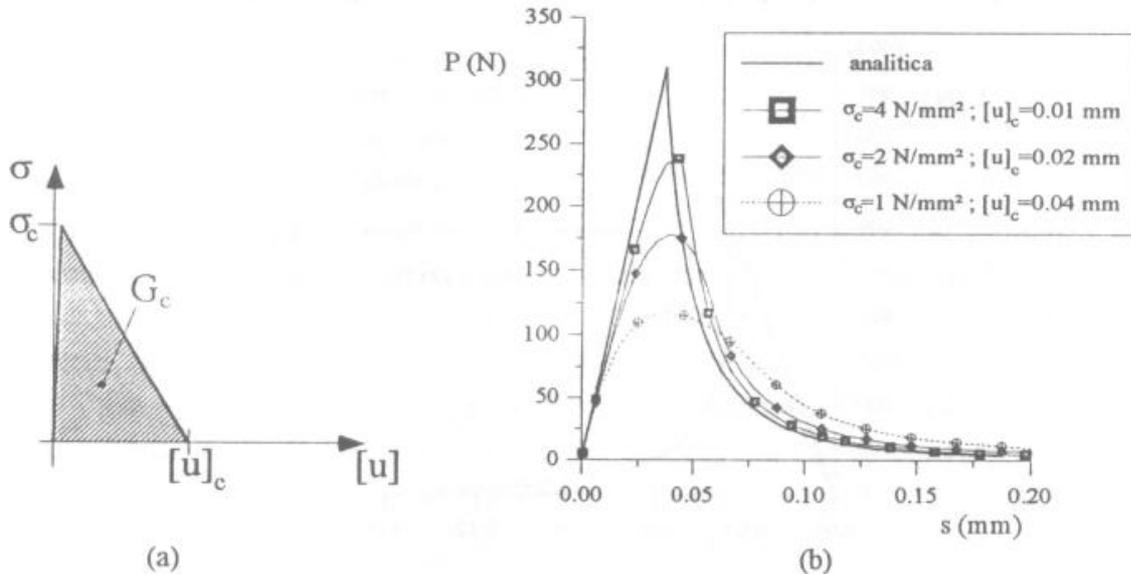


Fig. 7. Confronto analitico-numerico sulla risposta globale. $B=10$ mm; $W=100$ mm; $L=400$ mm; $G_c=0.02$ N/mm, $\alpha_0 = 0.4$. a) Legge coesiva utilizzata per la simulazione numerica. b) Curve P-s analitica e numeriche al variare di $[u]_c$.

La simulazione numerica della fase di propagazione è basata sull'uso di un modello coesivo, rappresentato da una legge sforzo-apertura di fessura del tipo raffigurato in fig. 7a. Tale comportamento viene attribuito a tutto il percorso di propagazione della fessura mediante l'inserimento di molle con caratteristica non lineare che collegano nodi della maglia ad elementi finiti posti lungo la linea di fessura. L'area sottesa dalla curva di fig. 7a rappresenta l'energia di frattura G_c . Al crescere della pendenza del ramo softening si ottiene un comportamento coesivo sempre più fragile, con riduzione dell'ampiezza della zona di processo, che tende a ridursi ad un punto come previsto nell'ambito della MFEL. Il comportamento globale del provino simulato numericamente si avvicina pertanto, all'aumentare del softening nel modello coesivo, alla risposta analitica per $G_c = \text{costante}$. Tale andamento è confermato dai risultati riportati in fig. 7b, dove vengono confrontate una curva P-s teorica ottenuta con $G_c = \text{costante}$ e curve dedotte dalle simulazioni numeriche al variare della legge coesiva, a parità di energia di frattura.

4. PROVINO DI TRAZIONE CON SINGOLO INTAGLIO (SENT).

La procedura della sezione 2 conduce alla seguente espressione della cedevolezza elastica del provino di trazione con singolo intaglio SENT (fig. 8):

$$C(\alpha) = \frac{L}{EBW} + \frac{2}{EB} \int_0^\alpha \frac{3\alpha'^5 - 9\alpha'^4 + 10\alpha'^3 - 2\alpha'^2 + \alpha'}{(1-\alpha')^3} 1.3183 [3(1-\alpha') + \alpha'^{2.472}] d\alpha' \quad (13)$$

non completamente integrabile in forma chiusa. Operando con una procedura di integrazione numerica si giunge ai risultati mostrati nei grafici delle fig. (9), (10), (11),

che riportano caratteristiche del modello analoghe a quelle rappresentate nelle fig. (4), (6), (7b) relativamente al caso del provino 3PB.

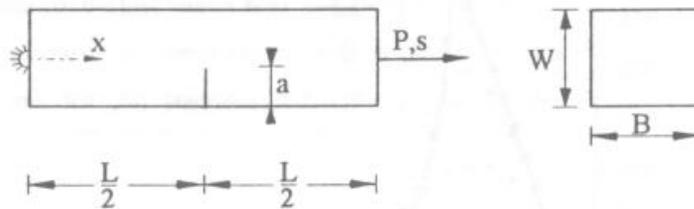


Fig. 8. Provino di trazione con singolo intaglio SENT.

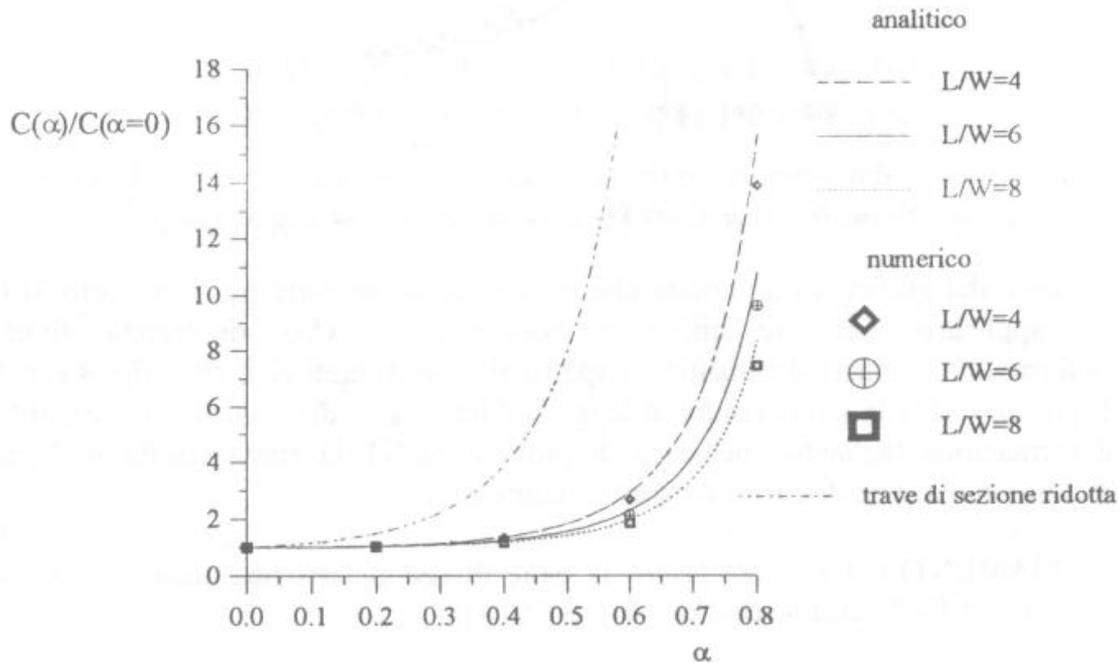


Fig. 9. Incremento della cedevolezza elastica in funzione della profondità della fessura. $B=10 \text{ mm}$; $W=100 \text{ mm}$.

In particolare in fig. 9, oltre ai risultati analitici del modello proposto ed a quelli numerici, è riportata la curva di cedevolezza ottenuta attribuendo a tutta la trave l'area ridotta \hat{A} : $C(\alpha)/C(\alpha = 0) = (1 + 3\alpha^2/(1 - \alpha)^2)/(1 - \alpha)$.

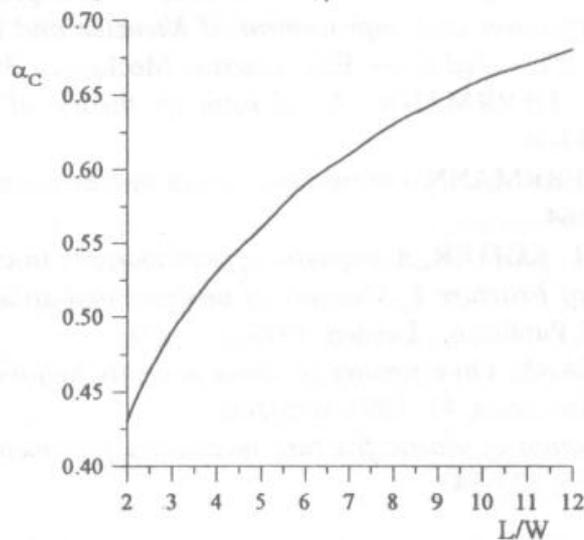


Fig. 10. Condizioni di stabilità in controllo di spostamento. Profondità critica α_c in funzione della snellezza L/W . $B=10 \text{ mm}$; $W=100 \text{ mm}$.

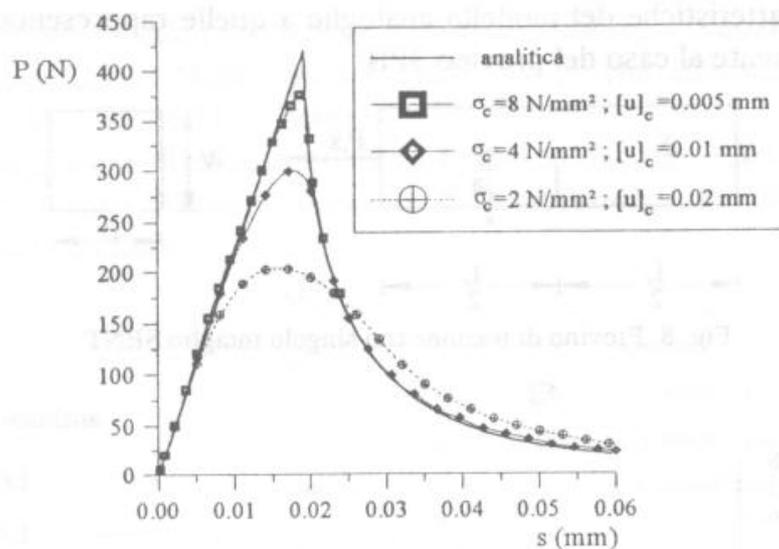


Fig. 11. Confronto analitico-numerico sulla risposta globale. $B=10$ mm; $W=100$ mm; $L=400$ mm; $G_c=0.02$ N/mm, $\alpha_0=0.6$. Curve P-s analitica e numeriche al variare di $[u]_c$.

Dall'esame dei grafici si può notare che le considerazioni fatte per il provino 3PB si possono applicare inalterate anche a questo caso. Una differenza riguarda l'approssimazione del modello analitico, rispetto ai risultati numerici, nelle fig. 4 e 9. Nel caso di provino 3PB la stima risulta in leggero difetto, avendo trascurato il contributo della deformazione tagliante; nel caso di provino SENT la stima risulta in leggero eccesso, con un margine di errore comunque contenuto.

RINGRAZIAMENTI: il presente lavoro fa parte di una ricerca finanziata dal Ministero dell'Università e della Ricerca Scientifica (MURST 60%).

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI.

- [1] D. BROEK, *The practical use of fracture mechanics*. Kluwer Academic Publishers 1989
- [2] J.F. KNOTT, *Fundamentals of fracture mechanics*. Butterworths, Londra, 1973.
- [3] O. ALLIX - P. LADEVEZE - A. CORIGLIANO, *Damage analysis of interlaminar fracture specimens*. Composites Structures, 31, 1995, 61-74.
- [4] O. ALLIX - A. CORIGLIANO, *Modelling and simulation of crack propagation in mixed-modes interlaminar fracture specimens*. Int. J. Fracture, 1996, di prossima pubblicazione.
- [5] Z.B. BAŽANT, *Justification and improvement of Kienzler and Herrmann's estimate of stress intensity factors of cracked beam*. Eng. Fracture Mechanics, 36, 3, 1990, 523-525.
- [6] R. KIENZLER - G. HERRMANN, *An elementary theory of defective beams*. Acta Mechanica, 62, 1986, 37-46.
- [7] R. KIENZLER - G. HERRMANN, *On material forces in elementary beam theory*. J. Appl. Mech., 53, 1986, 561-564.
- [8] J.P. BENTHEM - W.T. KOITER, *Asymptotic approximations to crack problems*. In: G.C. SIH (ed.), *Mechanics of Fracture I: Methods of analysis and solution of crack problems*, Noordhoff International Publishing, Leyden, 1973, 131-178.
- [9] H. GAO - G. HERRMANN, *On estimates of stress intensity factors for cracked beams and pipes*. Eng. Fracture Mechanics, 41, 1992, 695-706.
- [10] A. BAKKER, *Evaluation of elastic fracture mechanics parameters for bend specimens*. Int. J. Fracture, 71, 1995, 323-343.