

IGF 12 - XII Convegno Nazionale

Gruppo Italiano Frattura

Parma, 12-13 giugno 1996

## ANALISI DELLA DISTRIBUZIONE COMPLETA DELLE TENSIONI ALL'APICE DI UN DIFETTO TRAMITE WF

*M. Beghini, L. Bertini, F. Di Puccio*

Dipartimento di Costruzioni Meccaniche e Nucleari

Universita' di Pisa

Via Diotisalvi, 2 - 56126 Pisa

PAROLE CHIAVE: Meccanica della Frattura Lineare Elastica, Weight Function.

### SOMMARIO

Il presente lavoro illustra, relativamente al primo modo di frattura, l'influenza di alcuni termini non singolari sullo stato di tensione elastico all'apice di un difetto e propone un metodo che permette di valutare questi termini attraverso la conoscenza della WF e del T-stress. Viene inoltre indicata una semplificazione di tale metodo basata sulla possibilita' di determinare il valore del fattore di intensificazione degli sforzi in corrispondenza della lunghezza della fessura in esame e di altre due fessure fittizie, dipendenti dall'estensione della zona d'apice in esame. I risultati ottenibili con entrambi i metodi sono confrontati con le soluzioni determinate attraverso l'analisi agli Elementi Finiti.

### 1. INTRODUZIONE

La Meccanica della Frattura Lineare Elastica si basa sull'assunzione che il comportamento a rottura di un corpo fessurato sia governato dallo stato di tensione elastico che si produce all'apice del difetto. La descrizione di tale stato di tensione, ottenuta da Irwin e Williams per un corpo di dimensioni finite, è rappresentata da uno sviluppo in serie e quindi da infiniti termini dei quali generalmente si utilizza solo il primo, che essendo caratterizzato da un andamento singolare all'apice, tende a dominare nell'intorno dell'apice stesso sugli altri termini che si mantengono invece finiti. Questa approssimazione è indicata come caratterizzazione ad un parametro -il fattore di intensificazione degli sforzi  $K$ - della soluzione elastica e la sua validita' è limitata ad un intorno dell'apice piccolo rispetto alle dimensioni

del corpo e del difetto.

Studi recenti hanno mostrato come in alcuni casi [1, 2], la caratterizzazione ottenuta con il solo termine singolare non sia sufficiente e sia quindi necessaria una descrizione piu' accurata dello stato di tensione. Con questo scopo il presente lavoro illustra, per un corpo omogeneo ed isotropo sollecitato secondo il primo modo di frattura, la possibilita' di determinare 5 termini dello sviluppo in serie, sulla base della conoscenza della Weight Function (WF); si assume quindi per le componenti di tensione un'espressione del tipo:

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij,0}(\theta) + a_1 f_{ij,1}(\theta) + a_2 \sqrt{r} f_{ij,2}(\theta) + a_3 r f_{ij,3}(\theta) + a_4 \sqrt{r^3} f_{ij,4}(\theta) \quad (1)$$

dove  $r$  e  $\theta$  sono le coordinate polari (fig.1.(a)).

## 2. FONDAMENTI

L'impiego della (1) per la definizione dello stato di tensione nella zona d'apice di una fessura richiede la conoscenza dei coefficienti  $a_i$ ; l'ipotesi di partenza per la loro determinazione si basa sulla possibilita' di conoscere, utilizzando le WF, la tensione  $\sigma_{yy}$  sul "ligament" e quindi da questa ricavare le altre componenti di tensione in tutto l'intorno in esame.

Si consideri un corpo piano contenente una fessura di lunghezza  $a$ , soggetto a condizioni di carico e di vincolo sul contorno tali da produrre solo il primo modo di apertura e si indichino con  $\sigma_{yy}(x, a)$  le tensioni normali agenti sul "ligament". E' noto che il FIS puo' essere calcolato con una espressione del tipo:

$$K(c) = \int_0^c \sigma_{yy}(x, 0) h(x, c) dx \quad (2)$$

dove  $h(x, c)$  e' la Wf e  $\sigma_{yy}(x, 0)$  sono le tensioni normali, cioe' le tensioni agenti nel corpo integro soggetto alle stesse condizioni di carico e vincolo sul contorno. E' stato osservato [3] che il FIS puo' essere ottenuto anche integrando la distribuzione agente sul "ligament" davanti all'apice della fessura  $a$ , quando  $a < c$  (fig.1.(b)):

$$K(c) = \int_a^c \sigma_{yy}(x, a) h(x, c) dx \quad (3)$$

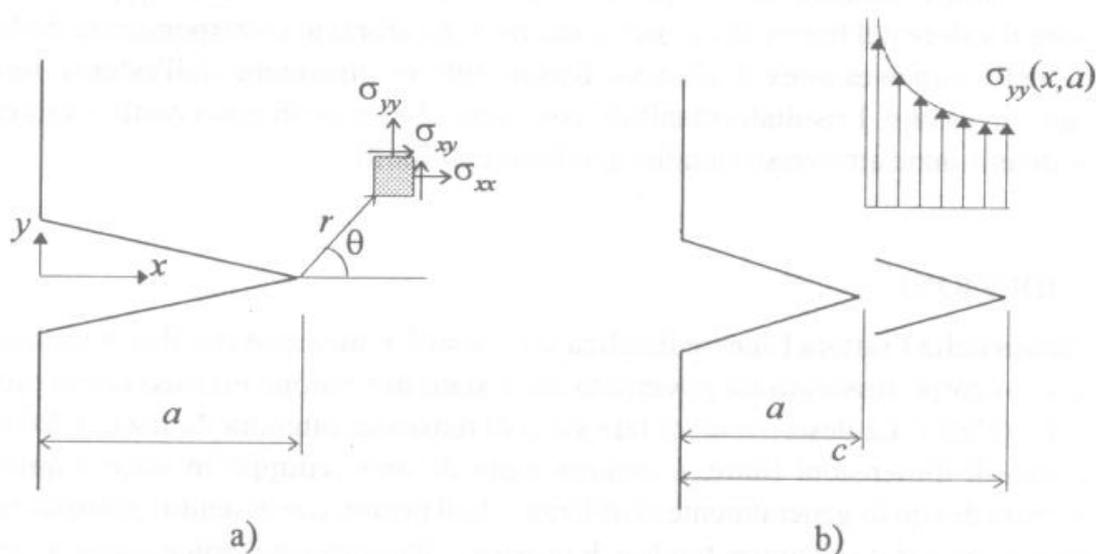


Fig. 1. a) sistema di riferimento; b) fessura reale  $a$  e fittizia  $c$  e tensione normale sul "ligament".

Scrivendo la  $\sigma_{yy}(x, a)$  data dalla (1) in cui si e' posto  $r=x-a$  and  $\theta=0$ , si ottiene:

$$\sigma_{yy}(x, a) = \frac{K(a)}{\sqrt{2\pi(x-a)}} + a_2 \sqrt{(x-a)} + a_4 \sqrt{(x-a)^3} \quad (4)$$

essendo  $f_{yy,1}(0) = f_{yy,3}(0) = 0$ . Sostituendo la (4) nella (3), si ottiene ancora:

$$K(c) = \int_a^c \left[ \frac{K(a)}{\sqrt{2\pi(x-a)}} + a_2 \sqrt{(x-a)} + a_4 \sqrt{(x-a)^3} \right] h(x, c) dx \quad (5)$$

dove  $a_2$  e  $a_4$  sono le incognite, mentre  $K(c)$  può essere calcolato tramite la (2). Considerando almeno due valori di  $c$  (es.  $c_1$  e  $c_2$ ) si ottiene dalla (5) un sistema che può essere risolto per valutare  $a_2$  e  $a_4$  in forma chiusa o numericamente a seconda dell'espressione di  $h(x, c)$ . Si fa notare che, fornendo la (4) un'espressione approssimata, in seguito alla limitazione nel numero di termini considerati nella (1), i valori da assegnare a  $c$  devono essere opportunamente scelti in base all'estensione della regione di fronte all'apice in cui si vuole determinare lo stato di tensione.

La valutazione dei due coefficienti tuttora incogniti,  $a_1$  ed  $a_3$ , che non sono direttamente influenzati dalla  $\sigma_{yy}(x, a)$  sul "ligament" richiede qualche ulteriore considerazione. In particolare, data l'espressione delle  $f_{ij,1}(\theta)$ ,  $a_1$  risulta legato ad uno stato di tensione uniforme in direzione  $x$ , noto come T-stress i cui valori si trovano in letteratura per numerosi casi (Larsson and Carlsson [4] and Sherry et al. [5]). Nulla si può invece dire sul valore di  $a_3$ , che, essendo  $f_{yy,3}(\theta) = 0$ , influenza solamente la  $\sigma_{xx}$  (attraverso il  $\cos\theta$ ) e la  $\sigma_{xy}$  (secondo il  $\sin\theta$ ).

Al fine di superare le difficoltà connesse con la determinazione rigorosa dei coefficienti della (1) e di ottenere espressioni aventi un accettabile grado di accuratezza su zone relativamente ampie, si è deciso di introdurre arbitrariamente nella (4) due termini aggiuntivi, uno costante ed uno lineare:

$$\sigma_{yy} = \frac{K(a)}{\sqrt{2\pi(x-a)}} + b_1 + a_2 \sqrt{(x-a)} + b_3(x-a) + a_4 \sqrt{(x-a)^3} \quad (6)$$

In accordo con la (6) e trascurando il termine in  $a_3$ , le altre componenti di tensione possono essere scritte:

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij,0}(\theta) + a_1 f_{ij,1}(\theta) + b_1 g_{ij,1}(\theta) + a_2 \sqrt{r} f_{ij,2}(\theta) + b_3 r g_{ij,3}(\theta) + a_4 \sqrt{r^3} f_{ij,4}(\theta) \quad (7)$$

dove le  $f_{ij,m}(\theta)$  (con  $m=0,1,2,4$ ) sono le stesse che compaiono nella (1) mentre  $b_1$  e  $b_3$  moltiplicano due nuove funzioni  $g_{ij,1}(\theta)$  e  $g_{ij,3}(\theta)$ . Queste funzioni sono state determinate risolvendo il problema elastico per un corpo seminfinito caricato su metà contorno rispettivamente con tensioni costanti e lineari, con il metodo di Kolosov e Muskhelishvili [6], basato sulla formulazione in variabile complessa del problema elastico.

Utilizzando il metodo delle WF sopra esposto, si possono calcolare  $b_1$ ,  $a_2$ ,  $b_3$  e  $a_4$ , considerando nell'equazione (5) almeno 4 lunghezze di fessura  $c$  in modo da ottenere un sistema di  $n$  ( $n \geq 4$ ) equazioni del tipo:

$$K(c_j) = \int_a^{c_j} \left[ \frac{K(a)}{\sqrt{2\pi(x-a)}} + b_1(x-a)^0 + a_2 \sqrt{(x-a)} + b_3(x-a) + a_4 \sqrt{(x-a)^3} \right] dx \quad (8)$$

che, ponendo:

$$D_{ij} = \int_a^{c_j} (x-a)^{(i-1)/2} \cdot h(x, c_j) dx \quad \text{con } j=1..n \quad (9)$$

si puo' scrivere:

$$D_{1j} b_1 + D_{2j} a_2 + D_{3j} b_3 + D_{4j} a_4 = K(c_j) - \frac{K(a)}{\sqrt{2\pi}} D_{0j} \quad (10)$$

ed in forma matriciale diviene:

$$D \cdot A = K - K_0 \quad (11)$$

dove A e' il vettore delle incognite e  $K-K_0$  quello dei termini noti. La soluzione del sistema, con il Normal Equation Method, è data dalla:

$$A = (D^T \cdot D)^{-1} \cdot D^T \cdot (K - K_0) \quad (12)$$

Ai coefficienti cosi' ricavati si deve poi aggiungere il T-stress.

### 3. CONFRONTO CON LA SOLUZIONE DEL PROBLEMA DI WESTERGAARD

Al fine di discutere il grado di accuratezza ottenibile tramite l'approssimazione ad un parametro e il metodo proposto, si consideri il problema di Westergaard di una lastra infinita con fessura passante lunga  $a$  in stato equibiaassiale di tensione ( $\sigma=1$  MPa), la cui soluzione esiste in forma chiusa. Per tale caso il fattore di intensificazione degli sforzi vale  $K = \sqrt{a\pi}$

ed i T-stress è zero. Si confrontano in fig.2 gli andamenti della tensione  $\sigma_{yy}$  ottenuti dalla soluzione esatta, dal termine singolare e dall'approssimazione a 5 termini, calcolati ad una distanza dall'apice pari ad un decimo la lunghezza di fessura al variare dell'angolo  $\theta$  tra  $\theta$  e  $\pi$ . L'ordinata dei diagrammi si puo' intendere sia come tensione assoluta che come tensione normalizzata rispetto a quella applicata.

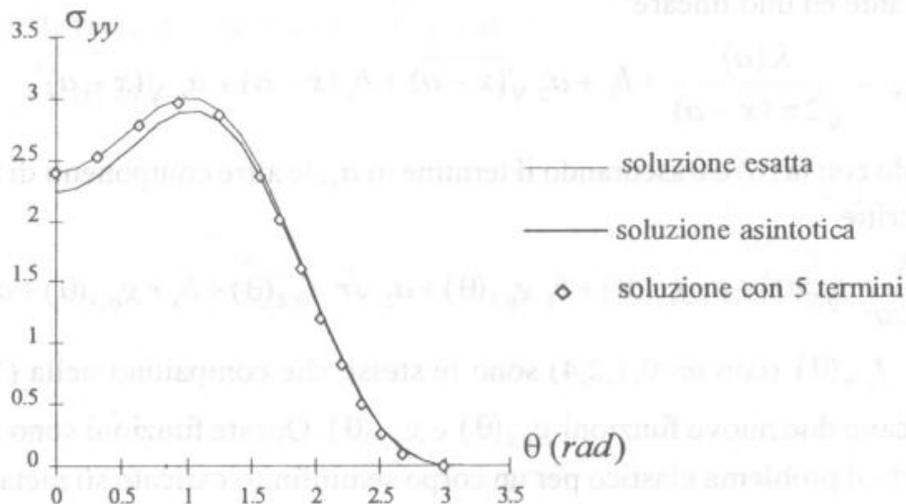


Fig.2 Confronto della componente  $\sigma_{yy}$  per il problema di Westergaard.

La figura mostra come utilizzando il solo termine singolare si commetta un errore  $\approx 8\%$  pur ad una distanza dall'apice piuttosto piccola; si osserva inoltre come i termini proposti, aggiunti a quello singolare, permettano di recuperare in maniera significativa tale errore. Analoghe considerazioni sulla qualita' delle approssimazioni si possono ripetere relativamente alle altre componenti di tensione.

#### 4. MODELLO CON GLI ELEMENTI FINITI

Un confronto analogo per corpi di dimensioni finite -per cui non esiste soluzione esatta in forma chiusa- richiede la definizione di una soluzione sufficientemente precisa da poter essere utilizzata come riferimento. Si e' creato per questo scopo, tramite il codice Ansys, un modello agli Elementi Finiti, la cui accuratezza e' stata verificata tramite un apposito studio di convergenza.

I casi esaminati si riferiscono ad un pannello con intagli laterali e ad uno con fessura centrale passante in trazione, ottenuti con la stessa geometria spostando i vincoli di simmetria longitudinale; a causa di errori numerici che avrebbero alterato la desiderata precisione dei risultati, non si e' invece sfruttata la simmetria rispetto al piano della fessura.

Il modello e' stato realizzato con elementi isoparametrici ad 8 nodi; la zona attorno all'apice e' descritta con una disposizione a raggiera di elementi i primi dei quali hanno lato pari ad un millesimo della lunghezza di fessura. A causa di tale dimensione così ridotta e' risultato preferibile non impegnare elemento tipo "quarter-point" all'apice del difetto.

La validita' del modello e' stata verificata riproducendo il problema di Griffith che e' stato rappresentato assegnando al rapporto tra larghezza del corpo e lunghezza di fessura, teoricamente infinito, un valore pari a 10. La soluzione ottenuta ha mostrato valori delle tensioni e del FIS con errori minori dello 0.1% rispetto alla soluzione teorica.

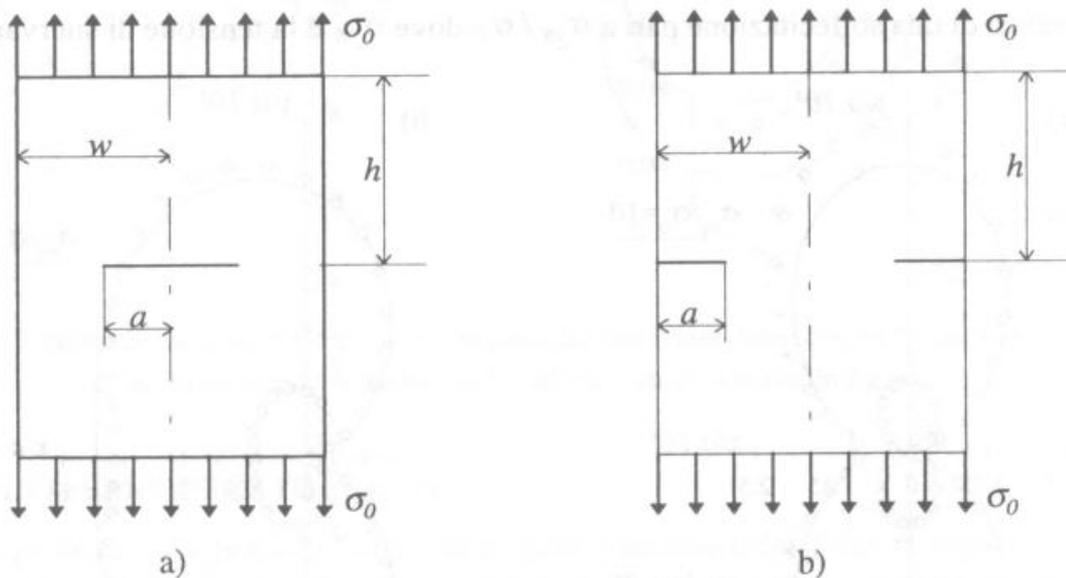


Fig.3 a) Pannello con fessura centrale e b) pannello con intagli laterali

La soluzione numerica relativa ad un pannello con fessura centrale (fig.3(a)), con  $w=h=40$  mm ed  $a=4$  mm e' stata considerata per confrontare i risultati ottenibili con la (7). Si sono determinati i coefficienti  $b_1$ ,  $a_2$ ,  $b_3$ , ed  $a_4$  con la (12), utilizzando la WF indicata da Wu [7] ed assegnando alle lunghezze di fessura fittizie 50 valori equispaziati tra  $a$  e  $1.1a$ ; il T-stress è approssimabile a quello relativo al problema di Griffith (-1 MPa). Il confronto tra lo stato di sollecitazione ottenuto con il metodo degli elementi finiti e quello descritto dalla (7) e' illustrato in fig.4 per la componente  $\sigma_{yy}$  rispetto a due angoli ( $0$  e  $\pi/4$ ) e per raggi compresi tra  $0.02$  e  $0.1 a$ , ossia in un intorno abbastanza piccolo dell'apice dove si ritiene comunemente valida l'approssimazione ad un parametro.

Una indicazione "complessiva" sulla qualita' dei risultati puo' essere ottenuta rappresentando alcune curve di livello della tensione equivalente di Von Mises,  $\sigma_{eq}$ , sia in condizioni di

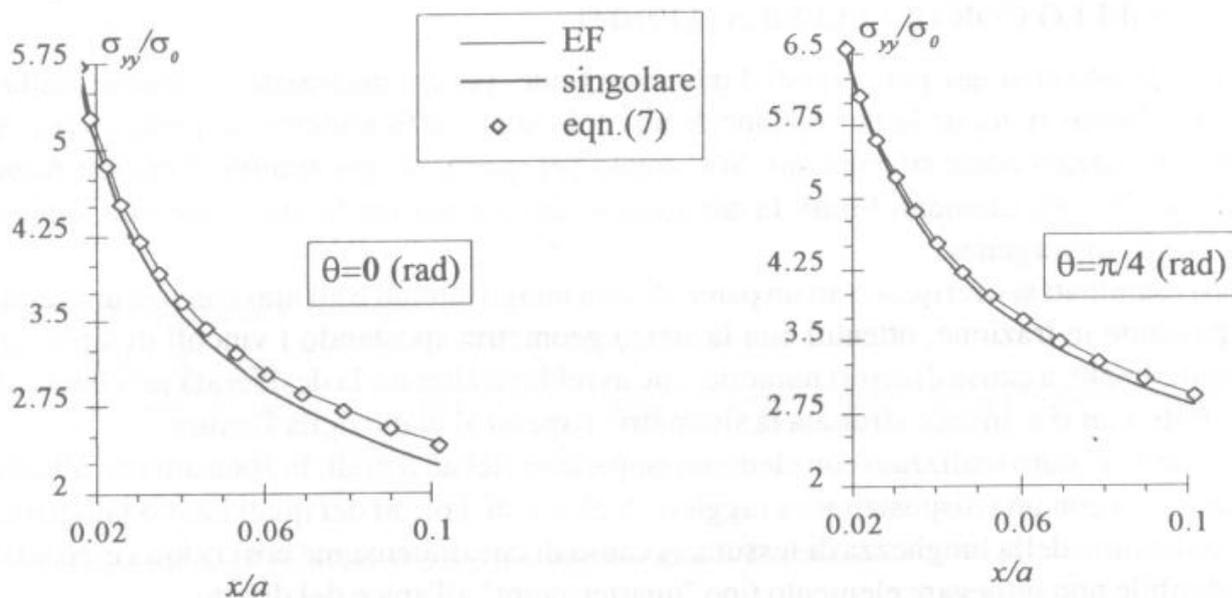


Fig.4 Confronto per pannello con fessura centrale sulla componente  $\sigma_{yy}$  per  $r/a=0.1$ .

"plane stress" che di "plane strain" (fig.5). Le mappe illustrate si riferiscono a due rapporti  $\sigma_{eq} / \sigma_0$  e possono essere considerate come una stima della zona plastica per un materiale in presenza di una sollecitazione pari a  $\sigma_{ys} / \sigma_0$  dove  $\sigma_{ys}$  è la tensione di snervamento.

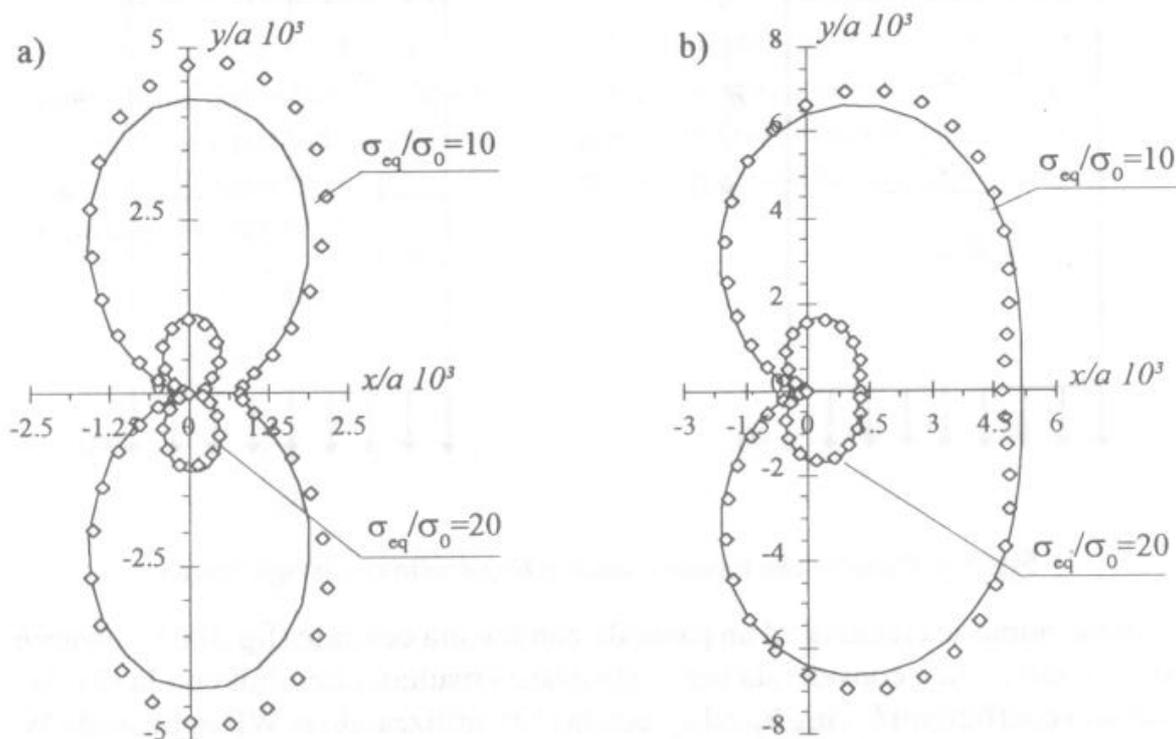


Fig.5 Confronto tra le zone plastiche a) in "plane strain"; b) in "plane stress" (i simboli utilizzati sono quelli descritti in fig.4)

I risultati forniti dagli Elementi Finiti non sono stati riportati in quanto indistinguibili, nella scala adottata, da quelli della soluzione a 5 termini. a riprova della buona accuratezza di quest'ultima. Si puo' osservare come l'approssimazione ad un parametro fornisca una soluzione che differisce dall'andamento reale per quanto riguarda sia la forma che l'estensione della zona plastica, specialmente in condizioni di plane strain e per angoli  $\theta \in (\pi/4, 3\pi/4)$ ,

mentre sul "ligament" l'accuratezza appare migliore.

Un altro confronto e' stato fatto prendendo in esame un pannello con intagli laterali (fig.3.(b)) con  $w=h=40$  mm,  $a=4.8$  mm anch'esso soggetto ad una tensione di trazione pari a 1 MPa. Si sono assegnate alle lunghezze di fessura fittizie 60 valori equispaziati tra  $a$  e  $1.2a$ , mentre il T-stress e' -0.6 MPa. Si riportano in fig.8 i risultati rappresentati attraverso il confronto delle zone plastiche (fig.6.(b)).

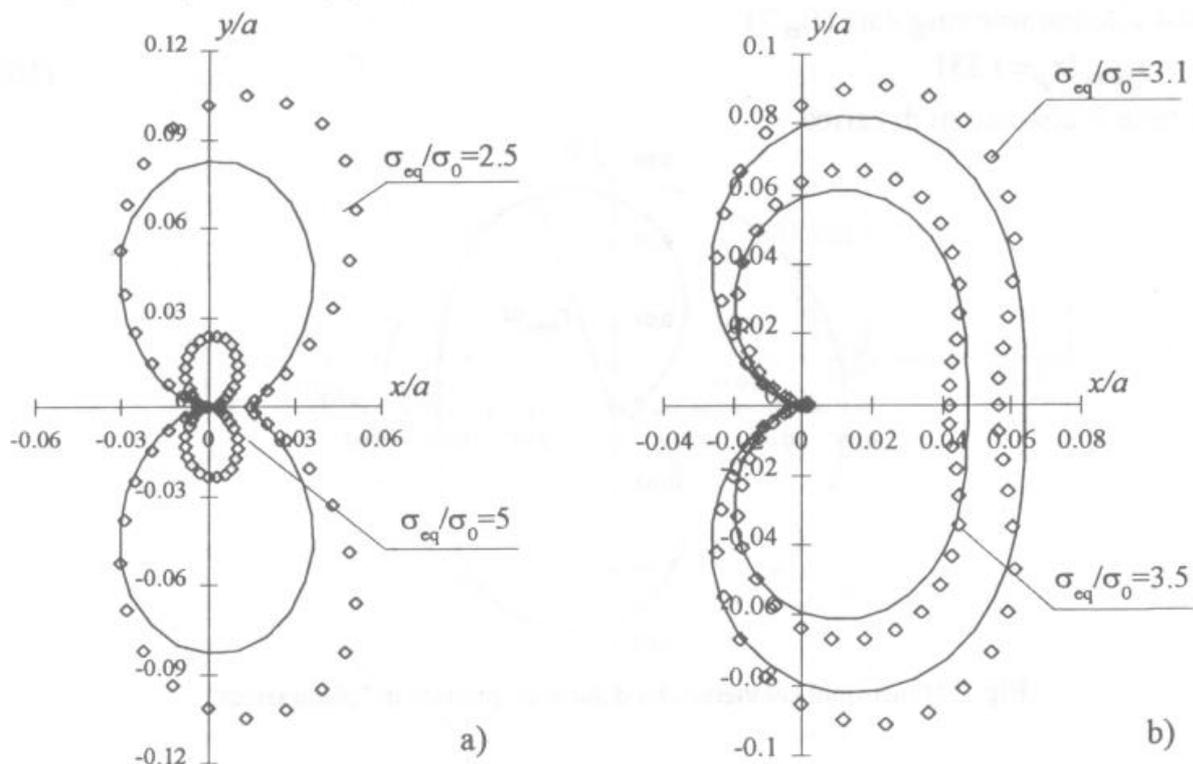


Fig.6 Confronto tra le zone plastiche per un pannello con intagli laterali a) in "plane strain"; b) in "plane stress" (i simboli utilizzati sono quelli descritti in fig.4).

## 5. METODO SEMPLIFICATO

Il metodo proposto, che richiede l'aggiunta di quattro termini e del T-stress a quello singolare presuppone la conoscenza delle WF e la soluzione di un sistema di equazioni lineari. Volendo rendere piu' semplice la determinazione dello stato di tensione, a costo pero' di una minore precisione dei risultati, anziche' considerare l'equazione (7) si puo' utilizzare la (4) e risolvere due equazioni del tipo (5). Una ulteriore semplificazione si puo' fare nel calcolo degli integrali, inserendo al posto della WF il suo primo termine, che e' comune a tutte le geometrie e che descrive la singolarita':

$$h(x, c) = \sqrt{\frac{2}{c\pi}} \cdot \left(1 - \frac{x}{c}\right)^{-0.5} \quad (13)$$

In questo modo la (5) puo' essere risolta in forma chiusa, ottenendo:

$$K(c_j) = K(a) + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot (a - c_j) \cdot a_2 + \frac{3}{4} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot (c_j - a)^2 \cdot a_4 \quad (14)$$

Per calcolare i coefficienti e' sufficiente sostituire due valori di  $c_j$  nella (14); volendo caratterizzare meglio un intorno comprendente la "zona plastica", si suggerisce di far riferimen-

to a due grandezze caratteristiche della zona di processo vale a dire il raggio plastico in condizioni critiche calcolato secondo l'espressione indicata da Irwin:

$$r_p = \frac{1}{2\pi} \cdot \left( \frac{K_{IC}}{\sigma_{sm}} \right)^2 \quad (15)$$

ed il raggio massimo della zona plastica alla rottura in condizioni di plane stress, calcolato con il solo termine singolare (fig. 7):

$$r_{\max}/r_p = 1.331 \quad (16)$$

per tutte le condizioni di carico.

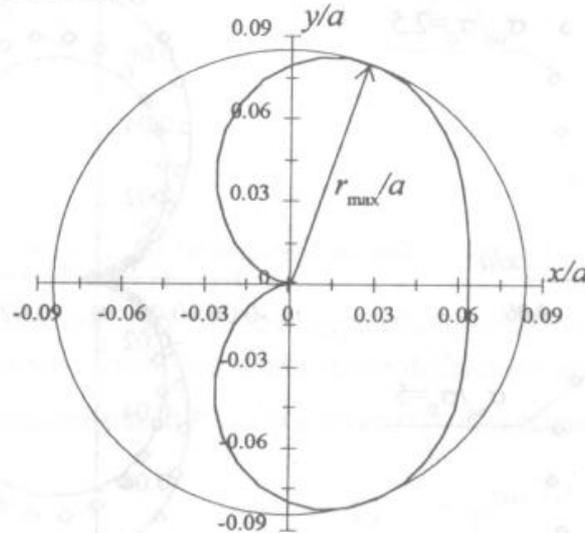


Fig.7 Dimensioni caratteristiche della zona plastica in "plane stress".

$$a_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{[K(a+r_{\max}) - K(a)] - [K(a+r_p) - K(a+r_p)] \cdot 1.772}{1.331 \cdot 0.331 \cdot r_p} \quad (17)$$

$$a_4 = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{[K(a+r_{\max}) - K(a)] - [K(a+r_p) - K(a+r_p)] \cdot 1.331}{1.331 \cdot 0.331 \cdot r_p^2}$$

Dalla precedente equazione segue che per ottenere una migliore descrizione dello stato di tensione e' sufficiente conoscere oltre a  $K(a)$ , dal quale si ottiene  $r_p$  e quindi dalla (16)  $r_{\max}$ ,  $K(a+r_p)$  e  $K(a+r_{\max})$ .

Utilizzando queste semplificazioni per risolvere i due casi illustrati nel paragrafo precedente, pannello con intagli laterali e pannello con fessura centrale, si ottengono le descrizioni delle zone plastiche illustrate nelle figg. 8 e 9.

Si osserva che anche con le semplificazioni introdotte la soluzione ottenuta e' in buon accordo con quella fornita dagli Elementi Finiti e che la caratterizzazione ad un parametro offre una sottostima della "zona plastica" con errori piuttosto rilevanti, anche del 100% (fig. 8.(a)). Inoltre si rileva come la misura del raggio plastico sul "ligament", utilizzata anche dalle normativa ASTM, non sia indicativa come dimensione della "zona plastica", soprattutto in condizioni di "plane strain".

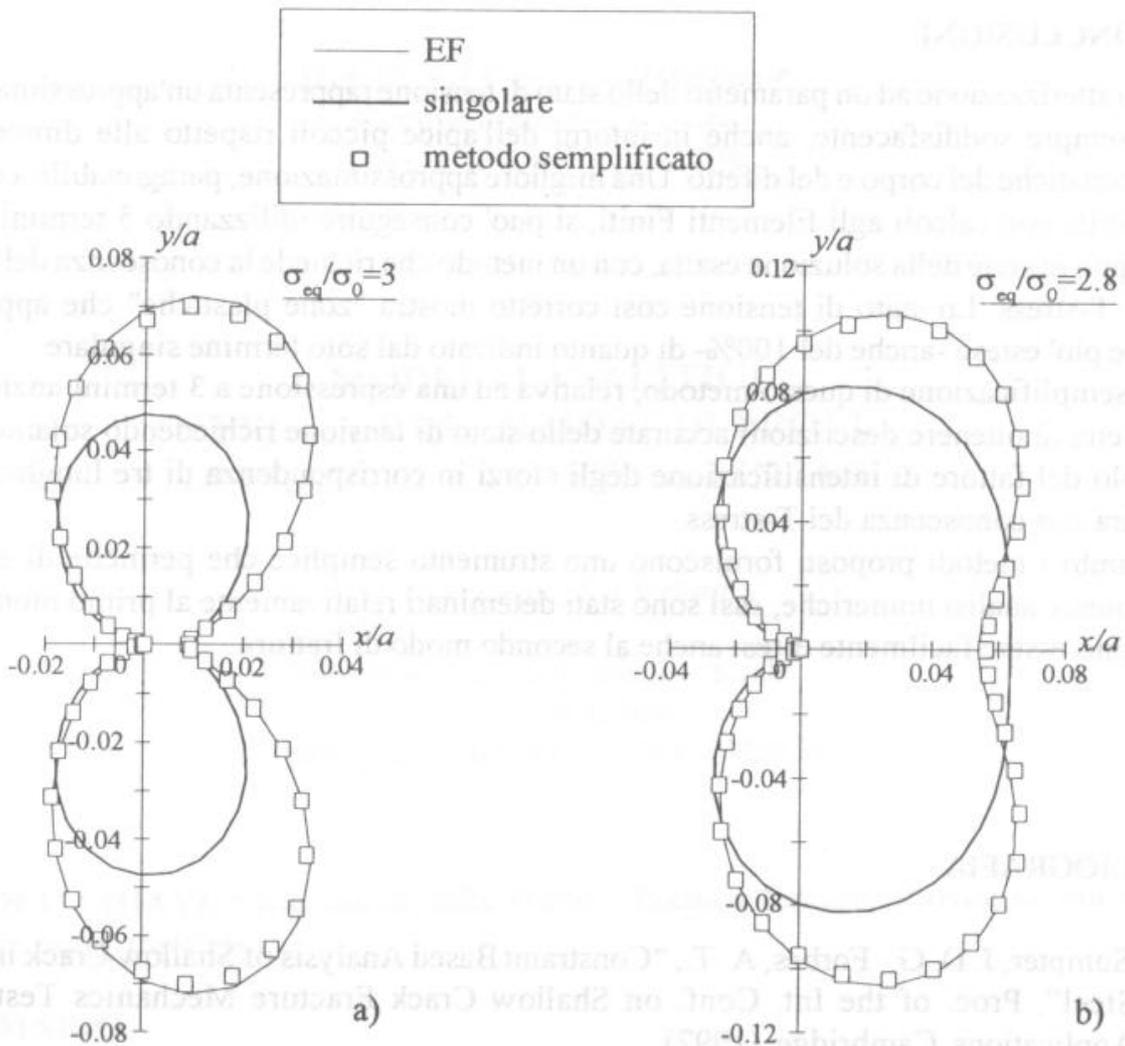


Fig. 8 Rappresentazioni delle zone plastiche in condizioni di "plane strain" a) e di "plane stress" b) per un pannello con fessura centrale.

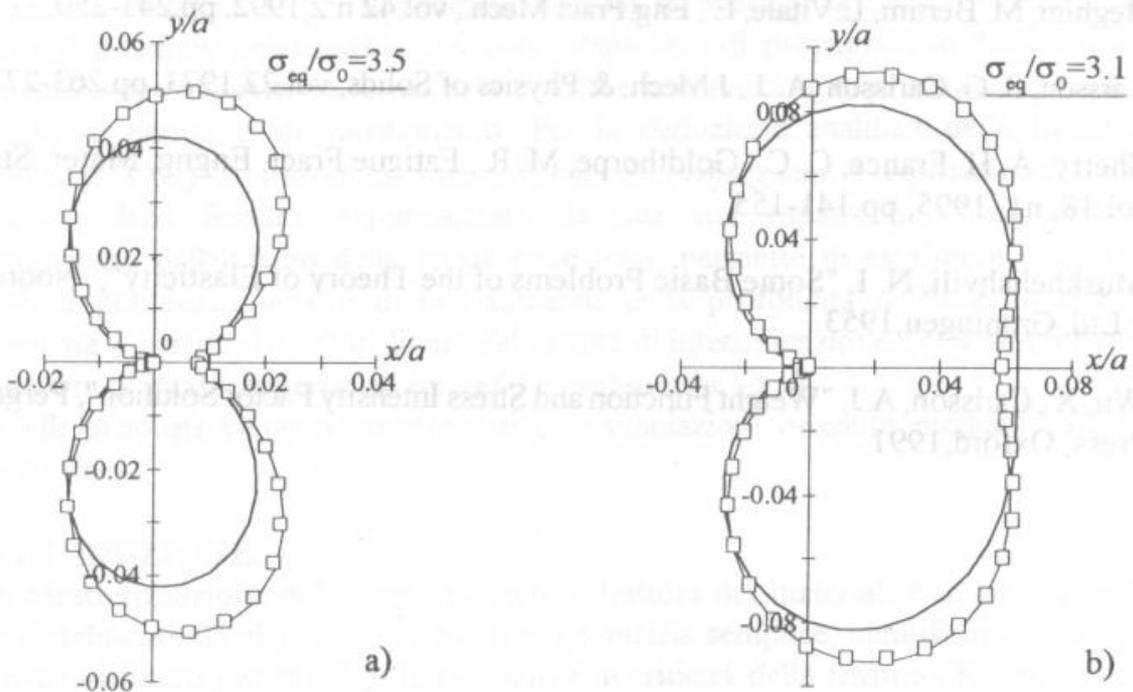


Fig. 9 Rappresentazioni delle zone plastiche in condizioni di "plane strain" a) e di "plane stress" b) per un pannello con intagli laterali.

## 6. CONCLUSIONI

La caratterizzazione ad un parametro dello stato di tensione rappresenta un'approssimazione non sempre soddisfacente, anche in intorni dell'apice piccoli rispetto alle dimensioni caratteristiche del corpo e del difetto. Una migliore approssimazione, paragonabile a quella ottenibile con calcoli agli Elementi Finiti, si può conseguire utilizzando 5 termini dello sviluppo in serie della soluzione esatta, con un metodo che richiede la conoscenza della WF e del T-stress. Lo stato di tensione così corretto mostra "zone plastiche" che appaiono essere più estese -anche del 100%- di quanto indicato dal solo termine singolare.

Una semplificazione di questo metodo, relativa ad una espressione a 3 termini anziché 5, permette di ottenere descrizioni accurate dello stato di tensione richiedendo solamente il calcolo del fattore di intensificazione degli sforzi in corrispondenza di tre lunghezze di fessura e la conoscenza del T-stress.

Entrambi i metodi proposti forniscono uno strumento semplice che permette di evitare complesse analisi numeriche; essi sono stati determinati relativamente al primo modo, ma possono essere facilmente estesi anche al secondo modo di frattura.

## BIBLIOGRAFIA

- (1) Sumpter, J. D. G. Forbes, A. T.; "Constraint Based Analysis of Shallow Crack in Mild Steel", Proc. of the Int. Conf. on Shallow Crack Fracture Mechanics Tests and Applications, Cambridge, (1992).
- (2) Romeo, A. Ballarini, R, J. of Fracture, vol. 71, n.1, 1995, pp.95-97.
- (3) Beghini, M. Bertini, L. Vitale, E., Eng.Fract.Mech., vol.42 n.2,1992, pp.243-250.
- (4) Larsson, S. G. Carlsson, A. J., J.Mech. & Physics of Solids, vol.22,1973, pp.263-277.
- (5) Sherry, A. H. France, C. C. Goldthorpe, M. R., Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct., vol.18, n1, 1995, pp.141-155.
- (6) Muskhelishvili, N. I. "Some Basic Problems of the Theory of Elasticity", Noordhoff P.Ltd, Groningen,1953.
- (7) Wu, X., Carlsson, A.J. "Weight Function and Stress Intensity Factor Solution", Pergamon Press, Oxford,1991.