

Un approccio statistico per la verifica della legge di scala multifrattale sulla resistenza dei materiali disordinati

A. Carpinteri, G. Ferro e S. Invernizzi
Dipartimento di Ingegneria Strutturale, Politecnico di Torino
10129 Torino, Italy.

Sommario

Nel presente lavoro si analizza il fenomeno della variazione della resistenza nominale a trazione dei materiali mediante un modello statistico multiparametrico, caratterizzato da una distribuzione dimensionale troncata per i difetti. Il modello è basato sul noto concetto dell' "anello più debole della catena" proposto da Weibull (1939) mentre per la distribuzione troncata si è utilizzata una Beta-Distribution. Il collasso strutturale avviene quando si raggiunge la condizione critica di propagazione in corrispondenza del difetto più pericoloso; il criterio di propagazione viene espresso secondo quanto indicato dalla Meccanica della Frattura Elastica Lineare (LEFM). Mediante il criterio di propagazione viene ottenuta la distribuzione della probabilità di collasso locale. La probabilità di collasso globale viene poi ricavata come composizione statistica di n probabilità di collasso locali indipendenti. Il modello consente di valutare il decremento della resistenza nominale a trazione al crescere della dimensione strutturale. I risultati ottenuti con questo modello confermano quanto previsto dalla Legge di Scala Multifrattale (MFSL) proposta da Carpinteri (1994a) e Carpinteri et al. (1994a, 1994b, 1995).

1 Introduzione

Le teorie classiche di collasso, quali la teoria della Plasticità e i criteri dello stato limite, non sono in grado di prevedere alcun effetto di scala. Di conseguenza in tale ambito la resistenza nominale non può che essere assunta come una costante del materiale, invariante rispetto alla dimensione strutturale.

Di contro, teorie quali la LEFM ed i modelli statistici che considerano distribuzioni dimensionali per i difetti non limitate, come ad esempio la distribuzione di autosomiglianza proposta da Carpinteri (1986), prevedono un decremento della resistenza nominale in funzione della dimensione strutturale espresso da una legge di potenza. Un analogo risultato si ottiene utilizzando teorie quali la Teoria del Danneggiamento, Carpinteri (1986), la teoria del Gruppo di Rinormalizzazione, Carpinteri (1994a), e l'ipotesi monofrattale per la sezione reagente della microstruttura

del materiale, Carpinteri (1994b). La pendenza della retta nel piano bilogarithmico $\ln \sigma - \ln d$, corrisponde all'esponente della legge di potenza e varia tra zero, per le teorie che non prevedono effetto di scala, ed il limite superiore 1/2 per la LEFM. Il modello statistico di autosomiglianza proposto da Carpinteri (1986), per materiali caratterizzati da microstruttura molto disordinata, prevede una legge di potenza con esponente prossimo al valore limite 1/2. Secondo queste teorie la resistenza nominale del materiale decresce indefinitamente per azzerarsi al limite quando la dimensione strutturale tenda ad infinito.

Un notevole progresso è stato ottenuto dalla Legge di Scala Multifrattale (MFSL) proposta da Carpinteri ed al. (1994a, 1994b, 1995) basata sull'ipotesi di natura multifrattale per la microstruttura del materiale. Tale legge descrive la transizione dalle grandi scale, per cui si ha una resistenza asintotica, alle piccole scale, per le quali l'effetto di scala tende al comportamento previsto dalla LEFM.

Il modello statistico multiparametrico che viene presentato in questo lavoro è stato sviluppato sull'ipotesi di autosomiglianza di Carpinteri (1986), introducendo una distribuzione dimensionale troncata per la popolazione statistica dei difetti equivalenti. Esso è in grado di cogliere come l'effetto del disordine microstrutturale non sia, come del resto la resistenza nominale, una quantità invariante ma subisca un'attenuazione al crescere delle dimensioni strutturali.

Dopo una breve presentazione della distribuzione di autosomiglianza si introducono la formulazione analitica del modello statistico troncato ed i risultati di uno studio parametrico finalizzato alla valutazione del significato fisico delle variabili in gioco. Infine viene proposto un confronto tra il modello statistico sviluppato, la Legge di Scala Multifrattale ed i risultati sperimentali ottenuti al Politecnico di Torino, Carpinteri e Ferro (1994, 1995), su provini di calcestruzzo soggetti a trazione uniforme.

2 La distribuzione di autosomiglianza

Si consideri un mezzo elastico lineare isotropo caratterizzato dalla presenza di una popolazione di difetti che seguano una data distribuzione dimensionale, Carpinteri (1986). Le imperfezioni della microstruttura reale sono perciò rappresentate mediante la definizione di difetti equivalenti costituiti da vuoti poligonali.

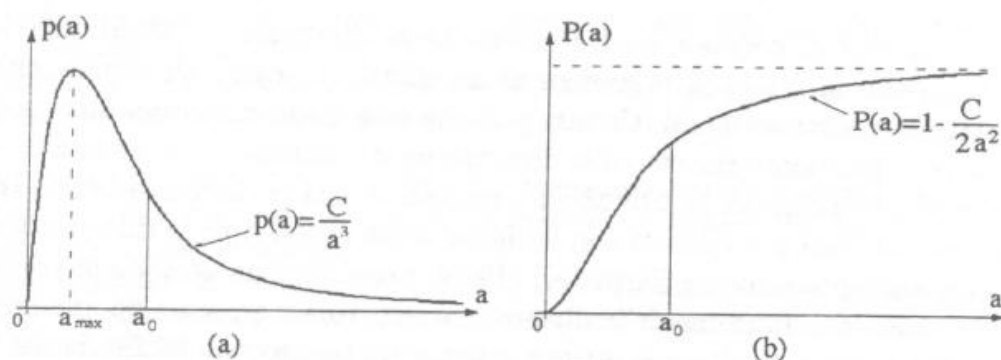


Fig. 1. Distribuzione di *autosomiglianza* per la dimensione dei difetti: (a) densità di probabilità; (b) distribuzione cumulativa.

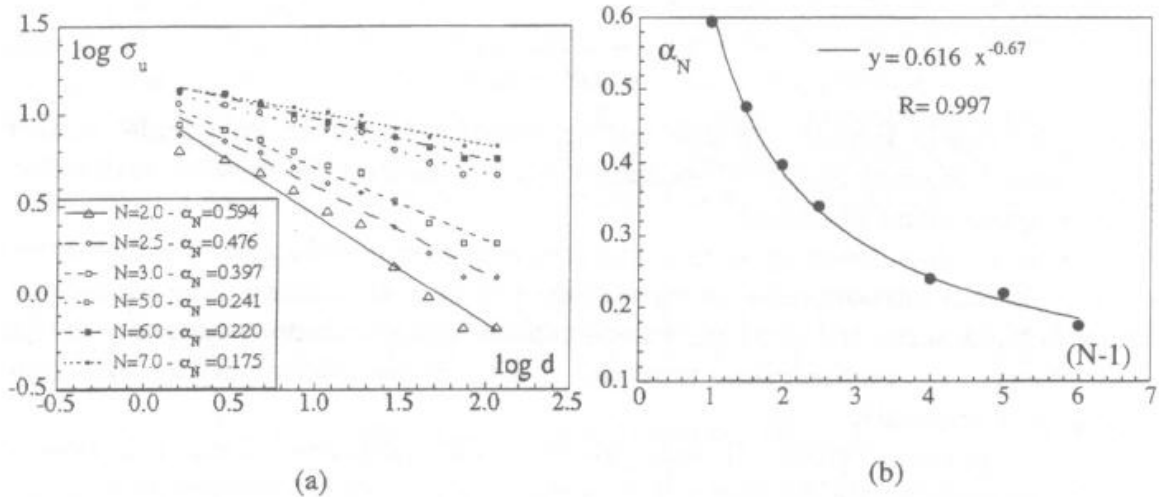


Fig. 2. (a) Effetto di scala sulla resistenza nominale al variare del parametro di disordine N ($a_0 = 1\text{mm}$). (b) Legge di potenza che lega la pendenza α_N della retta ad N .

L'interazione tra i difetti viene trascurata. Come prevede la teoria dell' *anello piú debole della catena*, la condizione di collasso globale viene raggiunta quando il difetto piú pericoloso si trova nella condizione critica di propagazione. La distribuzione di autosomiglianza (Fig.1) risulta essere un'espressione asintotica per la distribuzione dei difetti tale che il difetto piú pericoloso abbia dimensione proporzionale alla dimensione strutturale.

Alla distribuzione di autosomiglianza corrisponde un effetto di scala molto accentuato. Qualora i difetti equivalenti siano delle fessure alla Griffith, nel diagramma bilogarithmico $\ln \sigma - \ln d$, la retta che descrive l'effetto di scala ha pendenza pari a $-1/2$. Questo valore del gradiente appare essere un limite superiore sia teorico che sperimentale. La distribuzione dimensionale di autosomiglianza è stata successivamente generalizzata, al fine di descrivere il comportamento di microstrutture meno disordinate, mediante l'introduzione di un esponente N . Al crescere di N la dispersione dei difetti diminuisce e la funzione di densità di probabilità (PDF) tende asintoticamente ad una δ -Dirac. La PDF (Fig. 1) assume quindi la seguente espressione analitica:

$$p(a) = N \frac{C}{a^{N+1}} \quad a > a_0, \quad (1)$$

e conseguentemente la funzione di distribuzione cumulata (CDF) diviene (Fig. 1b):

$$P(a) = 1 - \frac{C}{a^N} \quad a > a_0, \quad (2)$$

dove a è la dimensione del difetto, $C = N(1 - P_0)a_0^N$ una costante, N il grado di disordine microstrutturale ed a_0 la dimensione del difetto minimo per il quale è valida l'espressione asintotica della distribuzione.

In questo caso, l'effetto di scala nel piano $\ln \sigma_u - \ln d$, è costituito da una retta con pendenza $-\alpha_N$:

$$\alpha_N = \frac{\alpha(\gamma)}{(N-1)^\zeta} \quad (3)$$

dove γ è l'angolo formato da due lati consecutivi del vuoto poligonale, mentre l'esponente ζ dipende da fattori secondari, quali la densità dei difetti e la distribuzione di quelli meno pericolosi.

Il modello di autosomiglianza è stato ulteriormente sviluppato da Carpinteri e Ferro (1994b) introducendo un'espressione per la distribuzione dimensionale dei difetti definita anche tra zero e a_0 , ed effettuando una simulazione statistica di tipo Monte Carlo i cui risultati sono mostrati, in Fig. 2, per microstrutture con grado di disordine crescente.

Ne emerge come l'effetto di scala previsto sulla resistenza nominale a trazione dipenda esclusivamente dal grado di disordine. La retta di effetto di scala (Fig. 2a) assume la pendenza limite pari a zero per microstrutture perfettamente ordinate ($N \rightarrow \infty$) mentre si ha invece pendenza massima pari a $-1/2$ per distribuzioni dimensionali di autosomiglianza ($N = 2$), ossia per grande disordine microstrutturale. Questo risultato fornisce una buona interpretazione del fenomeno reale solo in limitati intervalli dimensionali. L'effetto di scala nel piano bilogarithmico può essere considerato un'approssimazione lineare tangente del comportamento complessivo, che risulta invece non lineare.

3 La distribuzione troncata

Per poter tenere in conto la diversa influenza del disordine microstrutturale alle differenti scale occorre descrivere in modo più realistico la distribuzione dimensionale dei difetti. A questo scopo si introduce una distribuzione dimensionale troncata dei difetti. L'intero volume della struttura viene suddiviso in volumi elementari, ognuno dei quali rappresentativo della microstruttura del materiale. Per ogni volume elementare viene definita una distribuzione troncata della popolazione dei difetti equivalenti (penny-shaped cracks). Sono presi in considerazione solamente i difetti con l'orientazione più sfavorevole così che la popolazione dei difetti possa essere descritta per mezzo di un'unica variabile aleatoria, a , associata alla dimensione del difetto. L'interazione tra i difetti è considerata trascurabile. La variabile aleatoria associata alla dimensione è espressa dalla cosiddetta distribuzione Beta, nota nel calcolo probabilistico per la sua attitudine a descrivere popolazioni i cui elementi appartengano esclusivamente ad un dominio limitato. Un analogo utilizzo della distribuzione Beta per la popolazione dei difetti è stata adottata da altri autori, Hild and Marquis (1992). La PDF della distribuzione Beta può essere convenientemente scritta in funzione di a/a_M , dimensione del difetto normalizzata rispetto alla dimensione del difetto massimo teorico:

$$p\left(\frac{a}{a_M}\right) = \frac{1}{a_M B(\alpha+1, \beta+1)} \left(1 - \frac{a}{a_M}\right)^\beta \left(\frac{a}{a_M}\right)^\alpha, \quad 0 \leq \frac{a}{a_M} \leq 1. \quad (4)$$

La PDF è un'espressione polinomiale che assume valori positivi non nulli solo nell'intervallo $[0, a_M]$, in modo che venga così esclusa l'esistenza di difetti la cui

lunghezza sia maggiore di a_M . I parametri α e β , che determinano la forma della distribuzione (Fig. 3), da un punto di vista matematico, rappresentano l'ordine di infinitesimo della PDF rispettivamente quando il rapporto a/a_M tenda a zero ovvero ad 1. La CDF si ottiene dalla PDF mediante integrazione, rispetto alla lunghezza normalizzata del difetto. Questa operazione fornisce un risultato in forma chiusa solo se si limita l'analisi a valori di α e β interi; in tal modo si ottiene:

$$P\left(\frac{a}{a_M}\right) = \frac{1}{B(\alpha+1, \beta+1)} \sum_{i=0}^{\beta} (-1)^i \binom{\beta}{i} \frac{1}{\alpha+i+1} \left(\frac{a}{a_M}\right)^{\alpha+i+1}, \quad 0 \leq \frac{a}{a_M} \leq 1, \quad (5)$$

dove $\binom{\beta}{i} = \frac{\beta!}{i!(\beta-i)!}$ è il coefficiente binominale mentre $B(\alpha+1, \beta+1)$ è la cosiddetta funzione Beta di parametri $(\alpha+1)$ e $(\beta+1)$; quest'ultimo fattore normalizza l'area sottesa dalla PDF. Alcune funzioni di densità e cumulative sono mostrate in Fig. 3 al variare dei parametri di forma α e β . Al crescere di α vengono descritte microstrutture nelle quali vi è prevalenza di difetti grandi; la media dei difetti tende al valore, a_M , del difetto massimo. Una situazione opposta, con predominanza di difetti piccoli e piccola probabilità di esistenza per difetti di maggiore dimensione, si ottiene adottando valori di β superiori all'unità.

La probabilità di collasso locale può essere ottenuta adottando un criterio di propagazione dei difetti. Si consideri una fessura di forma circolare con raggio a , soggetta ad uno stato di trazione σ applicato ortogonalmente; la tensione che corrisponde alla condizione di propagazione instabile del difetto è espressa secondo la LFM e mostrata in Fig. 4. Lo stesso criterio può essere più convenientemente riformulato facendo comparire la lunghezza del difetto massimo teorico a_M , cui corrisponde la tensione di collasso σ_u :

$$\frac{\sigma}{\sigma_u} = \sqrt{\frac{a_M}{a}}. \quad (6)$$

In questo caso σ_u diviene la tensione di soglia al di sotto della quale vi è probabilità nulla di collasso. Il significato fisico di σ_u appare perciò identico a quello

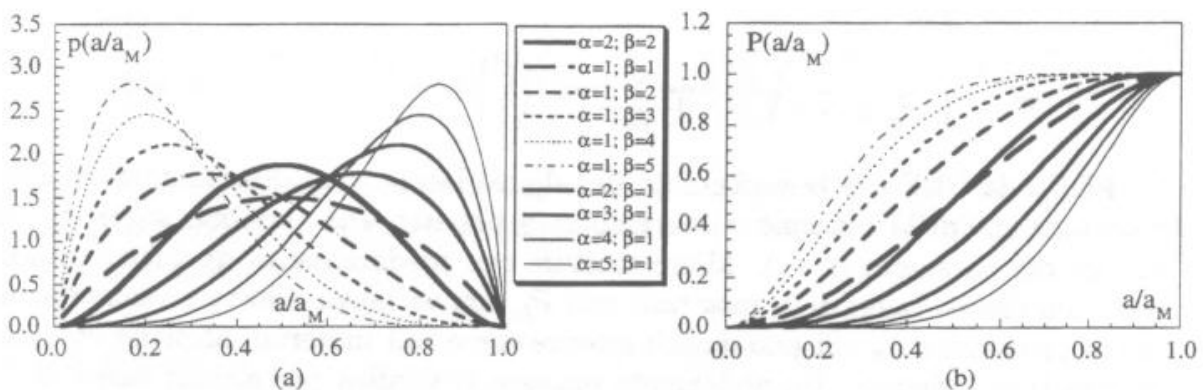


Fig. 3. Distribuzione dimensionale troncata dei difetti al variare dei parametri α e β : (a) funzione densità di probabilità; (b) funzione di probabilità cumulativa.

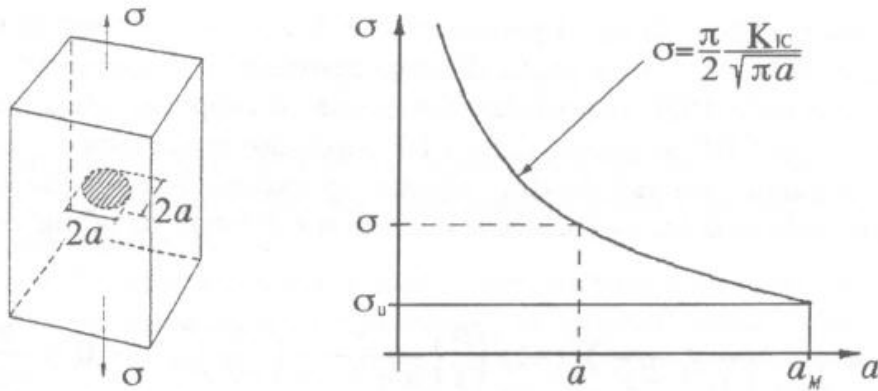


Fig. 4. Criterio di propagazione secondo la LEFM (penny-shaped crack).

della tensione di soglia proposta da Weibull (1939) nella sua nota distribuzione statistica. Il criterio di collasso adottato è monotono decrescente. Ciò rende possibile, come mostrato da Freudenthal (1968), ottenere direttamente la CDF per la probabilità di collasso locale $P_{f_0}(\sigma/\sigma_u)$, in funzione della CDF per dimensione dei difetti $P(a/a_M)$, e del criterio di propagazione (eq. 6), come segue:

$$P_{f_0}\left(\frac{\sigma}{\sigma_u}\right) = \begin{cases} 0 & , \sigma \leq \sigma_u \\ 1 - P\left(\frac{\sigma_u^2}{\sigma^2}\right) & , \sigma \geq \sigma_u, \end{cases} \quad (7)$$

dove σ è la tensione critica di propagazione per il difetto di dimensione a . Sostituendo l'eq. 5 nell'eq. 7, la probabilità di collasso locale $P_{f_0}\left(\frac{\sigma}{\sigma_u}\right)$ diviene:

$$P_{f_0}\left(\frac{\sigma}{\sigma_u}\right) = \begin{cases} 0 & , \sigma \leq \sigma_u \\ 1 - \frac{1}{B(\alpha+1, \beta+1)} \sum_{i=0}^{\beta} (-1)^i \binom{\beta}{i} \frac{1}{\alpha+i+1} \left(\frac{\sigma_u}{\sigma}\right)^{2(\alpha+i+1)} & , \sigma \geq \sigma_u. \end{cases} \quad (8)$$

Derivando l'eq. 8 rispetto alla tensione σ si ottiene la PDF della probabilità di collasso locale come:

$$p_{f_0}\left(\frac{\sigma}{\sigma_u}\right) = \begin{cases} 0 & , \sigma \leq \sigma_u \\ \frac{2}{\sigma_u B(\alpha+1, \beta+1)} \sum_{i=0}^{\beta} (-1)^i \binom{\beta}{i} \left(\frac{\sigma_u}{\sigma}\right)^{2(\alpha+i+1)+1} & , \sigma \geq \sigma_u. \end{cases} \quad (9)$$

La PDF e la CDF per la probabilità di collasso locale sono diagrammate in Fig. 5 in funzione della tensione σ , normalizzata rispetto alla tensione soglia σ_u , al variare dei parametri α e β . Microstrutture con predominanza di difetti grandi, ossia con elevati valori di α , mostrano una P_{f_0} con varianza ridotta e valore medio molto prossimo a σ_u . Si può quindi asserire come tali materiali abbiano una microstruttura ordinata. Un andamento opposto si verifica per elevati valori di β , ossia quando i difetti grandi sono poco probabili. In questo caso, infatti, la probabilità di collasso locale ha notevole dispersione e la microstruttura può definirsi disordinata.

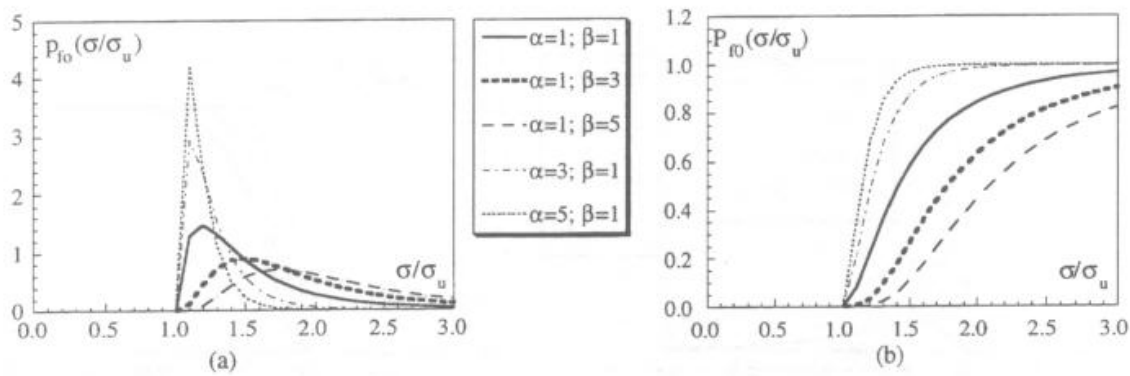


Fig. 5. Probabilità di collasso locale al variare dei parametri α and β : (a) densità di probabilità; (b) probabilità cumulata.

Per rendere meno onerosa la trattazione analitica, è stata considerata una struttura omogenea (insieme di volumi elementari identici) e soggetta ad uno stato di trazione uniforme. Così facendo, l'applicazione del concetto dell' *anello più debole della catena* diviene in pratica equivalente al quesito probabilistico di composizione di n variabili aleatorie indipendenti ed equidistribuite, la cui soluzione è:

$$P_{nx} = 1 - (1 - P_x)^n. \quad (10)$$

Se V è il volume della struttura, V_0 è l'elemento di volume sul quale è definita la distribuzione dimensionale dei difetti $P(a)$ ed $n = V/V_0$ è il rapporto tra i suddetti volumi, la probabilità di collasso globale diviene:

$$P_n = \begin{cases} 0 & , \sigma \leq \sigma_u \\ 1 - \left\{ \frac{1}{B(\alpha+1, \beta+1)} \sum_{i=0}^{\beta} (-1)^i \binom{\beta}{i} \frac{1}{\alpha+i+1} \left(\frac{\sigma_u}{\sigma} \right)^{2(\alpha+i+1)} \right\}^{\frac{V}{V_0}} & , \sigma \geq \sigma_u. \end{cases} \quad (11)$$

Quindi, se si considera una similitudine bidimensionale tra le strutture, il rapporto V/V_0 è pari a d^2/d_0^2 e la probabilità di collasso globale diviene:

$$P_n = \begin{cases} 0 & , \sigma \leq \sigma_u \\ 1 - \left\{ \frac{1}{B(\alpha+1, \beta+1)} \sum_{i=0}^{\beta} (-1)^i \binom{\beta}{i} \frac{1}{\alpha+i+1} \left(\frac{\sigma_u}{\sigma} \right)^{2(\alpha+i+1)} \right\}^{\frac{d^2}{d_0^2}} & , \sigma \geq \sigma_u, \end{cases} \quad (12)$$

dove d è la dimensione strutturale e d_0 è la lunghezza caratteristica della microstruttura. Derivando l'eq. 12 rispetto alla tensione σ , si ottiene la PDF per la probabilità di collasso globale:

$$p_n = \begin{cases} 0 & , \sigma \leq \sigma_u \\ \frac{2 \frac{d^2}{d_0^2} \sum_{i=0}^{\beta} (-1)^i \binom{\beta}{i} \left(\frac{\sigma_u}{\sigma} \right)^{2(\alpha+i+1)+1}}{\sigma_u B^2(\alpha+1, \beta+1)} \left\{ \sum_{i=0}^{\beta} (-1)^i \binom{\beta}{i} \frac{1}{\alpha+i+1} \left(\frac{\sigma_u}{\sigma} \right)^{2(\alpha+i+1)} \right\}^{\frac{d^2}{d_0^2}-1} & , \sigma \geq \sigma_u \end{cases} \quad (13)$$

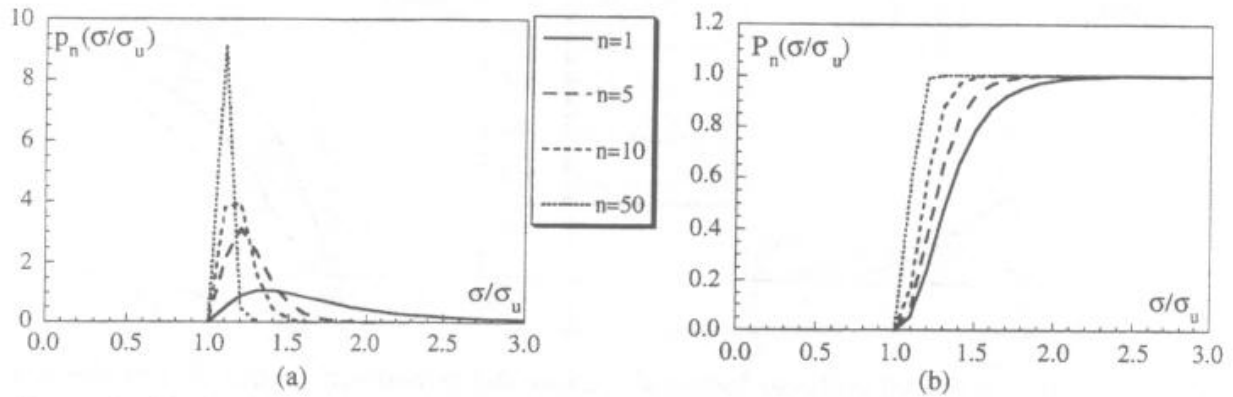


Fig. 6. Probabilità di collasso globale al variare del volume strutturale in corrispondenza del parametro n : (a) densità di probabilità; (b) probabilità cumulata ($\alpha = 1$, $\beta = 2$).

La PDF e la CDF per la probabilità di collasso globale sono diagrammate in Fig. 6, in funzione di σ/σ_u , per differenti volumi secondo il rapporto di composizione n . Occorre notare che n è in pratica il volume strutturale normalizzato rispetto al volume elementare V_0 . Al crescere di n la probabilità di collasso globale si addensa in prossimità della resistenza media, mentre questa, a sua volta, tende al valore di soglia σ_u . Strutture piccole, relativamente alla dimensione d_0 , mostrano un comportamento dominato dal disordine con grandi dispersioni della resistenza nominale. Viceversa, strutture relativamente grandi si comportano deterministicamente, con un valore di resistenza praticamente certo pari a σ_u . I due regimi descritti non sono separati da una soglia ben definita ma piuttosto da una transizione continua.

Il modello sviluppato si mostra perciò particolarmente adatto a descrivere l'effetto di scala sulla resistenza nominale quando si considerino estesi intervalli dimensionali. Per ottenere la legge di scala occorre esplicitare l'eq. 12 rispetto alla tensione σ applicata alla struttura. A causa della complessità analitica ciò non è possibile in forma chiusa; lo studio prosegue quindi avvalendosi di algoritmi di inversione numerica.

4 Studio parametrico del modello

In questo paragrafo si presenta uno studio finalizzato a valutare i significati fisici dei parametri liberi e verificarne l'influenza sull'effetto di scala. Tali variabili sono fatte variare singolarmente considerando trascurabile la loro influenza reciproca. La funzione resistenza nominale sarà pertanto esprimibile nella seguente forma:

$$\sigma = \sigma(d; \alpha, \beta, a_M, d_0, P_n). \quad (14)$$

In primo luogo viene analizzata l'influenza della dimensione del difetto massimo teorico. Ciò equivale a studiare l'influenza della tensione soglia σ_u , essendo i due valori legati deterministicamente mediante il criterio di propagazione dei difetti (Fig. 7). Occorre notare che il dominio di validità del modello probabilistico è

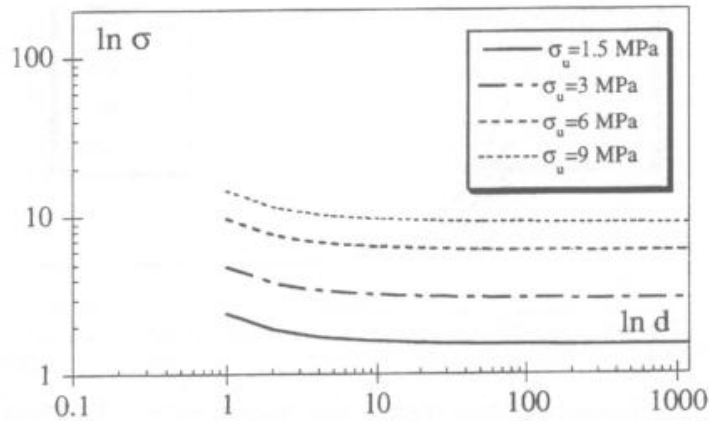


Fig. 7. Diagramma bilogarithmico resistenza-dimensione, al variare del parametro a_M o σ_u ($\alpha = 1$, $\beta = 2$, $d_0 = 1$, $P_n = 0.5$).

limitato a dimensioni strutturali maggiori di d_0 , corrispondenti cioè a volumi V maggiori di V_0 , ove V_0 costituisce pertanto il volume minimo sul quale possa essere definita la distribuzione dimensionale dei difetti. Volumi inferiori non sono in grado di contenere il difetto di dimensione massima a_M .

In Fig. 7 si nota come l'effetto di scala nel piano bilogarithmico non sia lineare e risulti caratterizzato da una concavità verso l'alto. Al crescere del parametro a_M la curva trasla verticalmente assumendo valori decrescenti della resistenza asintotica σ_u per $d \rightarrow \infty$. Due strutture possono avere diverso valore della resistenza asintotica, pur avendo la medesima distribuzione di difetti, solo se sono caratterizzate da un differente valore di tenacità K_{IC} .

La descrizione del disordine microstrutturale avviene sia per mezzo della definizione della popolazione dei difetti sia specificando il volume elementare alla quale questa è riferita. Il volume elementare V_0 è direttamente legato alla dimensione d_0 che assume quindi il significato fisico di lunghezza caratteristica della microstruttura. Variando d_0 (Fig. 8) la curva di effetto di scala subisce una traslazione orizzontale. La lunghezza caratteristica della microstruttura permette perciò di caratterizzare l'effetto del disordine nei confronti della scala considerata.

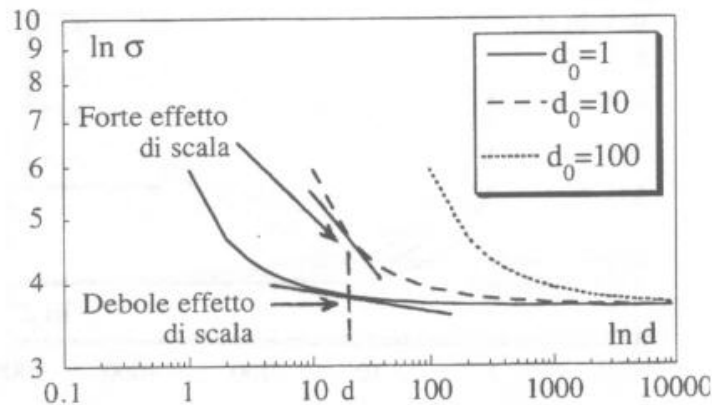


Fig. 8. Diagramma bilogarithmico resistenza-dimensione, al variare del parametro d_0 ($\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\sigma_u = 3.67 \text{ MPa}$, $P_n = 0.5$).

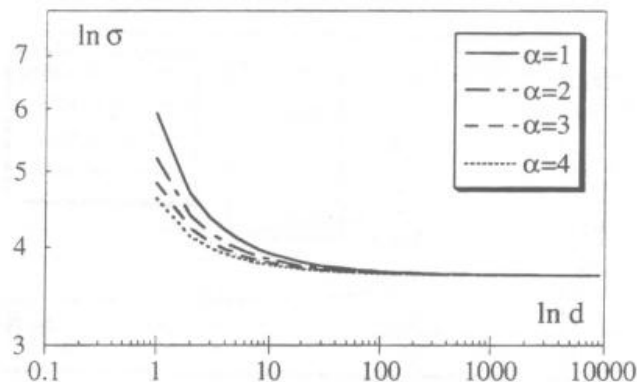


Fig. 9. Diagramma bilogarithmico resistenza-dimensione, al variare del parametro α ($d_0 = 1$, $\beta = 2$, $\sigma_u = 3.67MPa$, $P_n = 0.5$).

Una struttura con d_0 grande (e corrispondente volume elementare V_0) si comporta mostrando un elevato disordine microstrutturale, mentre, per la medesima dimensione strutturale d , una struttura con un ridotto valore di d_0 mostra un comportamento praticamente deterministico (Fig. 8).

L'analisi parametrica al variare di α e β riconferma le osservazioni già proposte analizzando la probabilità di collasso locale. Elevati valori di α (Fig. 9) caratterizzano microstrutture maggiormente ordinate; ciò corrisponde, nel piano $\ln \sigma - \ln d$, ad esigue differenze tra il valore locale ($d = d_0$) della resistenza media ed il valore asintotico σ_u . Materiali ordinati sono così caratterizzati da un limitato effetto di scala. Viceversa elevati valori di β (Fig. 10) corrispondono a materiali disordinati che sono caratterizzati da crescenti differenze tra la resistenza locale media e quella asintotica. Un maggiore disordine microstrutturale ha come corrispettivo una curva con pendenze più accentuate.

Infine è stata brevemente considerata l'influenza del frattile P_n della probabilità di collasso. Risulta evidente come l'effetto di scala sia più contenuto quando si considerino ridotte probabilità di collasso (Fig. 11). Questa dipendenza dal frattile P_n non è stata riscontrata nei modelli statistici con distribuzione dimensionale non limitata di difetti. Freudenthal (1968) ha mostrato come un modello statistico con

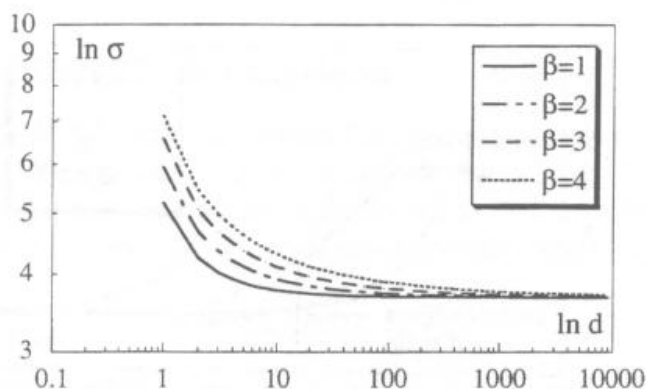


Fig. 10. Diagramma bilogarithmico resistenza-dimensione, al variare del parametro β ($\alpha = 1$, $d_0 = 1$, $\sigma_u = 3.67MPa$, $P_n = 0.5$).

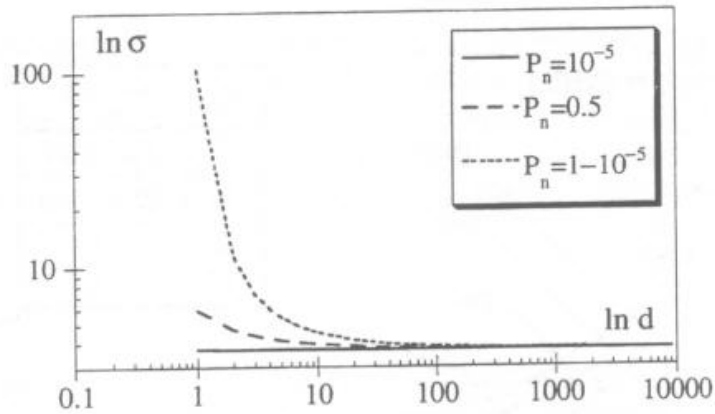


Fig. 11. Diagramma bilogarithmico resistenza-dimensione, al variare del frattile P_n ($\alpha = 1$, $\beta = 2$, $d_0 = 1$, $\sigma_u = 3.67 MPa$).

distribuzione non limitata di difetti sia caratterizzato da una distribuzione della resistenza locale che, al crescere dell'esponente di composizione n , trasla verso sinistra senza subire cambiamenti di forma. Ciò corrisponde ad una legge di scala (legge di potenza) che, nel piano bilogarithmico risulta lineare, qualunque sia il frattile considerato. Da ultimo occorre notare come il valore del frattile più adatto ad interpretare i dati di laboratorio sia $P_n = 0.5$, che corrisponde al valore medio della resistenza nominale.

5 Confronto con la MFSL e dati sperimentali

Nel presente paragrafo viene presentato un confronto tra l'effetto di scala previsto dal sopra descritto modello statistico e la Legge di Scala Multifrattale, Carpinteri (1994a), Carpinteri ad al. (1994a, 1994b). Ovviamente, il confronto è condotto limitatamente alle scale ove entrambi i modelli sono validi, ossia esclusivamente per dimensioni $d \geq d_0$. La MFSL può essere espressa come:

$$\sigma_N = f_t \left(1 + \frac{l_{ch}}{d} \right)^{1/2} \quad (15)$$

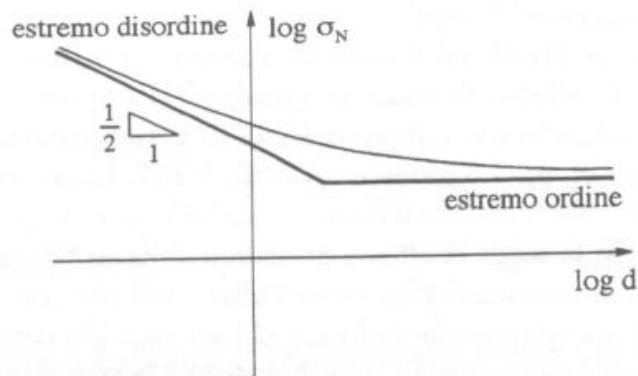


Fig. 12. Legge di Scala Multifrattale.

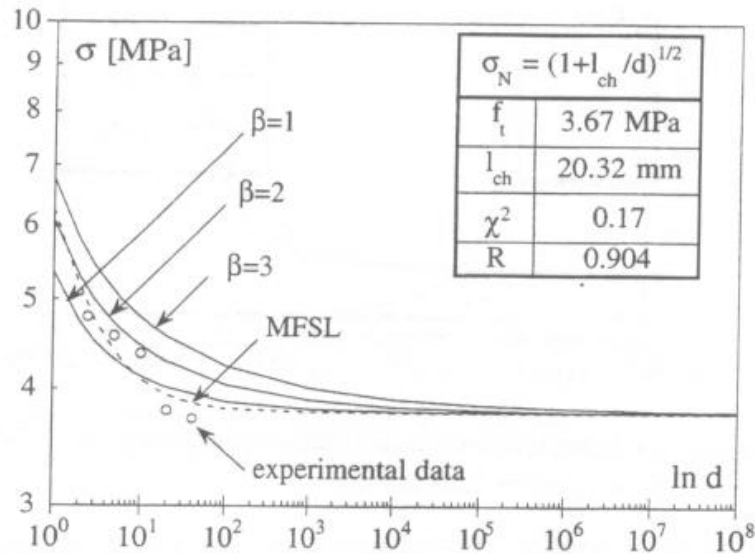


Fig. 13. Interpolazione sperimentale mediante MFSL e mediante il modello statistico multiparametrico.

dove f_t è la resistenza a trazione asintotica raggiunta in corrispondenza di dimensioni strutturali tendenti ad infinito, σ_N è la resistenza nominale a trazione per una struttura di dimensione d , e l_{ch} è una lunghezza caratteristica della microstruttura. Il comportamento della MFSL, nel piano bilogarithmico $\ln \sigma - \ln d$, mostra due asintoti rispettivamente con pendenza $-1/2$ in corrispondenza delle piccole scale, e pendenza nulla alle grandi scale. La curva di effetto di scala mostra una concavità verso l'alto (Fig. 12).

Il modello statistico con distribuzione troncata dei difetti e la MFSL risultano innanzitutto legati da una notevole analogia di fondo. Infatti l'approccio statistico adotta una descrizione locale della microstruttura definendo il volume elementare ed una distribuzione troncata di difetti che è duale al concetto di una dimensione frattale, secondo la MFSL, valida esclusivamente alle piccole scale. D'altro canto la MFSL prevede che la dimensione della microstruttura evolva, al crescere della scala di osservazione, verso la dimensione topologica intera. A questo aspetto corrisponde il meccanismo di composizione di variabili aleatorie con dominio limitato che porta all'annullamento della varianza e all'evoluzione della media verso un valore asintotico maggiore di zero.

Di conseguenza la MFSL ed il modello statistico portano ad un'analogia previsione della legge di effetto di scala, in quanto: (1) entrambi prevedono una resistenza nominale asintotica in corrispondenza di grandi dimensioni strutturali. Il parametro statistico σ_u ed il parametro f_t della MFSL hanno certamente lo stesso significato fisico.

(2) In entrambi i casi la legge di effetto di scala nel piano bilogarithmico $\ln \sigma - \ln d$, è non lineare ed ha concavità rivolta verso l'alto.

In mancanza di un'espressione in forma chiusa (eq. 14) capace di descrivere la variazione della resistenza nominale, non è possibile legare esplicitamente il valore della lunghezza caratteristica d_0 , con la sua corrispettiva l_{ch} , nonostante queste

abbiano un significato fisico del tutto simile. Infine, si può notare in Fig. 13 ($\alpha = 1$, $\beta = 2$, $a_M = 216$ mm, $P_n = 0.5$ and $d_0 = 10$ mm), come scegliendo particolari valori per i parametri del modello statistico sviluppato, si possa ottenere un'ottima corrispondenza sia con l'andamento della MFSL che con alcuni dati sperimentali ottenuti al Politecnico di Torino da Carpinteri e Ferro (1994b, 1995).

7 Conclusioni

E' stato sviluppato un modello statistico multiparametrico per lo studio della variazione della resistenza nominale a trazione dei materiali. Ciò permette di cogliere il comportamento dei materiali quando vengano presi in considerazioni estesi intervalli dimensionali. Il disordine microstrutturale è stato descritto mediante l'introduzione di una distribuzione dimensionale troncata per i difetti. Di conseguenza il modello è in grado di evidenziare la transizione di comportamento strutturale dalle piccole scale, in cui domina il regime disordinato, alle grandi per le quali invece si ha un comportamento ordinato.

Carpinteri e Ferro (1994a) hanno mostrato come la distribuzione di autosomiglianza sia strettamente legata all'ipotesi monofrattale per la microstruttura del materiale, dove all'esponente del disordine N corrisponde una dimensione fisica non intera per la dimensione della sezione reagente del materiale. Viene ottenuto, in questi casi, un effetto di scala caratterizzato da una pendenza costante nel diagramma bilogarithmico, che può essere considerato una buona approssimazione del comportamento reale solo in un limitato intervallo dimensionale.

La distribuzione troncata appare invece allinearsi con l'ipotesi multifrattale per la microstruttura del materiale, sulla quale si fonda la MFSL. L'effetto di scala previsto è perciò di validità più generale, in particolare quando vengano considerati estesi intervalli dimensionali.

Il limite intrinseco dei modelli statistici con distribuzione dimensionale non limitata per i difetti consiste nell'ammettere l'esistenza (probabilità non nulla) di un difetto di dimensione comunque grande, il che è fisicamente incongruente.

Il modello sviluppato prende in considerazione una struttura omogenea soggetta ad uno stato uniforme di trazione; l'estensione al caso di sollecitazioni più complesse comporta difficoltà analitiche ma può essere facilmente implementato numericamente. Questa problematica è già stata comunque affrontata e risolta da altri autori, Batdorf e Crose (1974).

Bibliografia

- Batdorf, S.B. e Crose, J.G. (1974) A statistical theory for the fracture of brittle structures subjected to nonuniform polyaxial stresses, **Journal of Applied Mechanics**, 41, 459-464.
- Carpinteri, A. (1986) **Mechanical Damage and Crack Growth in Concrete-Plastic Collapse to Brittle Fracture**, Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht.

- Carpinteri, A. (1994a) Scaling laws and renormalization groups for strength and toughness of disordered materials, **International Journal of Solids and Structures**, 31, 291-302.
- Carpinteri, A. (1994b) Fractal nature of material microstructure and size effects on apparent mechanical properties, **Mechanics of Materials**, 18, 89-101.
- Carpinteri, A., Chiaia, B. e Ferro, G. (1994a) Multifractal nature of material microstructure and size effect on nominal tensile strength, su Proceedings of IUTAM International Symposium on **Fracture of Brittle Disordered Materials: Concrete, Rocks, Ceramics**, September 20-24, 1993, Brisbane, Australia, 21-34.
- Carpinteri, A., Chiaia, B. e Ferro, G. (1994b) Multifractal scaling law for nominal strength variation of concrete structures, su Proceedings of JCI International Workshop on **Size Effect in Concrete Structures**, Oct. 31- Nov. 2, 1993, Sendai, Japan, 193-206.
- Carpinteri, A. e Ferro, G. (1994a) Size effect on tensile fracture properties: a unified explanation based on disorder and fractality of concrete microstructure, **Materials and Structures**, 27, 563-571.
- Carpinteri, A. e Ferro, G. (1994b) Variation of tensile strength related to structural size: an experimental and statistical investigation, in Proceedings of **ECF 10 Structural Integrity: Experiments, Models, Applications**, Berlin, Federal Republic of Germany, 20-23 September, 1994, 1429-1438.
- Carpinteri, A. e Ferro, G. (1995) Scaling behaviour of the experimental tensile softening curves: a multifractal model for the material ligament of concrete, su Proceedings of 7th International Conference on **Mechanical Behaviour of Materials - ICM7**, European Structural Integrity Society (ESIS), The Hague, 28 May - 2 June, 1995.
- Ferro, G. (1994) **Effetti di Scala sulla Resistenza a Trazione dei Materiali**, Tesi di Dottorato, Politecnico di Torino.
- Freudenthal, A.M. (1968) Statistical approach to brittle fracture, in **Fracture** (Ed. H. Liebowitz), Academic Press, New York, 2, 591-619.
- Hild, F. e Marquis, D. (1992) A statistical approach to the rupture of brittle materials, **European Journal of Mechanics, A/Solids**, 11, 753-765.
- Weibull, W. (1939) **A Statistical Theory of the Strength of Materials**, Swedish Royal Institute for Engineering Research, Stockholm.