

**IGF 11 - XI Convegno Nazionale
Gruppo Italiano Frattura
Brescia, 4-6 Luglio 1995**

**PROPAGAZIONE DI UNA FESSURA
IN UN MATERIALE VISCOELASTICO**

Alessandro Pirondi

Università di Parma, Dipartimento di Ingegneria Industriale
V.le delle Scienze, 43100 Parma, Italia

Sommario

In questo articolo si propone un metodo per la determinazione della velocità di propagazione di una fessura in un materiale dissipativo. La variazione delle grandezze energetiche durante la fase di propagazione è stata valutata per via numerica mediante il codice di calcolo a elementi finiti ABAQUS, nel caso particolare di un modello di materiale viscoelastico lineare.

1. Introduzione

La crescente disponibilità negli ultimi anni di strumenti di calcolo numerico sempre più potenti e di codici di simulazione sofisticati, permette di analizzare per via numerica problemi di natura sia teorica che pratica di crescente complessità, fornendo spesso un apprezzabile supporto a sperimentazioni e progetti.

In questo articolo si propone un approccio per la determinazione della velocità di propagazione di una cricca in un materiale dissipativo. Il procedimento è suddiviso in due parti: per prima si stima la condizione di incipiente propagazione per date condizioni al contorno, poi la velocità di propagazione a partire da tale condizione. In entrambe le fasi le variabili coinvolte sono calcolate mediante analisi agli elementi finiti con il codice di calcolo ABAQUS [1]. Il metodo è stato applicato ad un modello di materiale viscoelastico lineare.

2. Condizione di incipiente propagazione

La condizione di incipiente propagazione è data, per definite condizioni al contorno di carico, dal verificarsi dell'uguaglianza (1), per la quale la lunghezza della cricca a assume un valore critico a_{cr} .

$$G = R \quad (1)$$

G = rilascio unitario di energia

R = resistenza all'avanzamento della frattura

Nel caso particolare di afferraggi fissi, G è espresso dalla (2).

$$G = -\frac{\partial W_e}{\partial a} - \frac{\partial W_d}{\partial a} \quad (2)$$

W_e = energia potenziale elastica del sistema

W_d = " " dissipata in modo viscoso

Il termine $\frac{\partial W_d}{\partial a}$ è incluso solo se positivo.

3. Approccio per la determinazione della condizione di incipiente propagazione

Partendo sempre dalla configurazione indeformata e utilizzando i medesimi valori di velocità ed entità finale di deformazione e nel caso particolare di R indipendente dall'avanzamento (virtuale in questo caso) della cricca, la condizione di incipiente propagazione ($a = a_{cr}$) è rappresentata da:

$$-dW_e - dW_d = Rda \quad (3)$$

Nelle ipotesi esposte $G = G_{(a)}$ e quindi, per un generico valore di a e per un avanzamento virtuale da , la differenza di energia tra a ed $a + da$ è:

$$-dW_e - dW_d - Rda = f_{(a)} \quad (4)$$

Fissando un valore iniziale di lunghezza della cricca, la condizione (3) può essere approssimata (se esiste) utilizzando il metodo esposto in seguito per la fase di propagazione, limitandosi ai punti da 1 a 4 della procedura.

I valori di W_e e W_d per le diverse lunghezze iniziali della cricca a sono calcolati mediante analisi agli elementi finiti.

4. Bilancio energetico durante la propagazione

Il modello di propagazione utilizzato è quello di una cricca propagante in un corpo sotto carico statico trascurando gli effetti inerziali. In generale, tale approccio di tipo statico fornisce solamente la condizione iniziale (generalmente assunta come quella di incipiente propagazione [2]) e la eventuale condizione di arresto, ma non permette di stabilire la velocità V con la quale avviene la propagazione. Per materiali che presentino una

componente dissipativa, è stato sviluppato un modello statico di propagazione fondato sull'introduzione di una zona di processo all'apice (tipo Dugdale) [3] secondo il quale possono esistere le condizioni per cui la cricca propaghi con un valore finito di V . In questo articolo si è voluto invece utilizzare un approccio di tipo energetico, per cui la condizione di propagazione stabile è possibile se in ogni istante t è verificato il bilancio energetico (5)¹ (nel quale non si è considerata la componente di energia trasformata in emissioni acustica, calore, ecc., in quanto normalmente di entità trascurabile rispetto alle altre grandezze in gioco).

$$-\frac{\partial W_e}{\partial a} - \frac{\partial W_d}{\partial a} - \frac{\partial W_{ac}}{\partial a} = P_{fe} \quad (5)$$

in cui:

W_{ac} = energia liberata nell'aumento della superficie di frattura

P_{fe} = potenza fornita al sistema

I termini dell'equazione (5) sono funzioni di (V, t) ; nel caso fossero verificate le condizioni per la propagazione stabile è quindi possibile ricavare il valore di V . Nel caso particolare di $P_{fe} = 0$ (afferraggi fissi durante la propagazione) e di una tenacità a frattura R costante, la condizione dalla quale si ricava V è:

$$-\frac{\partial W_e}{\partial a} - \frac{\partial W_d}{\partial a} - RV = 0 \quad (6)$$

5. Approccio per la determinazione della velocità di avanzamento della cricca

Partendo dalle condizioni di incipiente propagazione, la velocità è ricavata per passi temporali successivi utilizzando i dati dell'analisi a elementi finiti. Fissato un passo temporale dt in cui si impone che V sia costante, la (5) dà luogo a una funzione (7), il cui annullarsi corrisponde alla condizione (6).

$$-dW_e - dW_d - RVdt = f(V) \quad (7)$$

Il procedimento analitico utilizzato per determinare tale valore è il metodo di Newton, applicato ai valori discreti dell'analisi a elementi finiti. Con riferimento alla Fig. 1, si ha l'equazione (8).

$$V_{n+1} = V_n - \frac{f(V_n)}{\left(\frac{f(V_{n+\Delta V}) - f(V_{n-\Delta V})}{2\Delta V} \right)} \quad (8)$$

In sintesi, si esegue la seguente procedura:

1. Si fissa un valore di primo tentativo V_0 e un valore ΔV .

¹ Deve anche essere verificata la condizione $\frac{\partial G}{\partial a} \leq \frac{\partial R}{\partial a}$.

2. Si eseguono le simulazioni di crescita con le velocità $V_0, V_0 + \Delta V, V_0 - \Delta V$.
3. Si calcola V_1 applicando la (8).
4. Si ripetono eventualmente i passi 1-3 fino a quando $V_n \cong V_{n+1}$.
5. Si esegue una simulazione con il valore di velocità del primo intervallo temporale, in modo da fornire condizioni iniziali necessarie per il secondo passo temporale.
6. Si ripetono i punti 1-4 per il nuovo intervallo temporale.

6. Modello ad elementi finiti

6.1. Modello geometrico

Il modello scelto per la simulazione è una striscia rettangolare con rapporto larghezza/lunghezza di 1/4 in cui si ha un singolo intaglio laterale. Tale modello corrisponde ad un generico provino per prove di propagazione in stato di sollecitazione essenzialmente uniassiale [4].

La discretizzazione di tale modello, tenuto conto delle simmetrie geometriche e di carico, è rappresentata in Fig. 2. Gli elementi sono del tipo a tensione piana (cioè la loro formulazione contiene già questa condizione) a 8 nodi.

6.2. Modello del materiale

Il modello di materiale con cui è stata condotta la simulazione è del tipo viscoelastico lineare, in cui la componente elastica dell'energia di deformazione è approssimata con il polinomio (qui espresso nella forma utilizzata in ABAQUS):

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + \frac{1}{D}(J_{el} - 1)^2 \quad (9)$$

in cui:

$$I_1 = \sum_1^3 \lambda_i^2; \quad I_2 = \sum_1^3 \lambda_i^2 \lambda_j^2; \quad J_{el} = \frac{\Delta Vol}{Vol}$$

λ_i = rapporti di allungamento principali

mentre quella viscosa è espressa dalla funzione di rilassamento sviluppata con una serie di Prony, per semplicità limitata al primo termine (corrispondente al comportamento di un solido lineare standard).

$$E_{R(t)} = E_0 \left[1 - g \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \right] \quad (10)$$

in cui:

$E_{R(t)}$ = modulo di elasticità al tempo t
 g = prima costante della serie

Le caratteristiche fondamentali sono:

$$E_0 = \text{modulo istantaneo} = 6(C_{10} + C_{01}) = 7 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0.499 \Rightarrow D = 0.0017$$

$$\tau = \text{tempo medio di rilassamento} = 10 \text{ s}$$

Per esso si è inoltre assunto un valore della tenacità a frattura pari a 5 kJ/m^2 , tipico per questi materiali.

6.3. Condizioni di carico

La simulazione si compone di due passi, di cui il primo per la determinazione della condizione di propagazione e il secondo per la velocità:

1. deformazione uniassiale ($\lambda_1 = \lambda$) in stato di tensione piana fino a $\lambda = 1.15$; la velocità di deformazione simulata è di 2 s^{-1} , che rappresenta un valore medio tra quelli utilizzati in [5] per prove di propagazione.
2. rilascio dei nodi sull'asse della cricca ad una velocità imposta, tramite l'algoritmo di "crack growth" implementato nel programma ABAQUS.

7. Risultati e discussione

Il rapporto tra la lunghezza a_{cr} e la larghezza del provino è risultata pari a ca. $1/2$, per le condizioni di carico esposte in precedenza.

Nelle Figg. 3 e 4 rispettivamente, sono rappresentate la configurazione deformata prima e dopo un intervallo temporale di avanzamento.

Le prime simulazioni di propagazione hanno fornito valori di $f_{(v)}$ positivi; variando dt da $1 \cdot 10^{-3}$ a $0.5 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ e provando con diversi valori V_0 di primo tentativo la tendenza non si è invertita. L'applicazione del metodo illustrato in precedenza ha mostrato la tendenza a scendere a valori $V < 0$ dopo 1 o 2 iterazioni; tale comportamento suggerisce che, nonostante la presenza di effetti viscosi, la propagazione sia instabile, ovvero prevalga nel modello la componente elastica. All'incertezza generale del risultato concorrono anche alcune fonti di approssimazione, che sono:

- la discretizzazione spaziale, che nel caso di velocità (quindi avanzamenti) molto basse o di intervalli temporali ridotti aumenta l'incidenza della variazione di energia connessa al distacco di un nodo sulla variazione energetica accumulata;
- il tempo di rilascio delle forze nodali in relazione alla velocità (presunta o reale) di propagazione. Il tempo di rilascio delle forze nodali è una variabile non fisica necessaria ad assicurare una buona convergenza del processo di calcolo; prove effettuate con due diversi valore di tale variabile hanno mostrato una differenza nella configurazione deformata a pari entità di avanzamento della cricca;
- l'approssimazione nel descrivere il comportamento reale da parte del modello di materiale adottato (solido lineare standard) quando la deformazione avvenga in tempi molto ridotti rispetto alla condizione "rilassata". In tali condizioni si ha generalmente uno scostamento apprezzabile tra modello e comportamento reale.

8. Conclusioni

Si è illustrato un metodo per il calcolo della velocità di avanzamento di un difetto in un corpo di materiale viscoelastico lineare; l'applicazione ad un modello di provino con intaglio laterale singolo non ha prodotto risultati quantitativamente significativi, probabilmente a causa del prevalere del comportamento elastico su quello viscoso nella fase di propagazione. Vi sono inoltre alcuni fattori, quali discretizzazione spaziale, tempo di rilascio delle forze nodali e comportamento del materiale per elevate velocità di deformazione, la cui influenza sarebbe da approfondire ulteriormente.

Riferimenti bibliografici

- [1] HIBBITT, KARLSSON & SORENSEN, "ABAQUS Users' Manual", Vol. I e II, Ver 5.4, 1994.
- [2] KANNINEN M. F., POPELAR C. H., "Advanced Fracture Mechanics", Oxford University Press Inc., New York, New York 10016, USA, 1985.
- [3] SCHAPERY R. A., "Correspondance principles and a generalized J integral for large deformation and fracture analysis of viscoelastic media", International Journal of Fracture (25)1984, pp. 195-223.
- [4] BROWN R. P., "Physical testing of rubbers", Applied Science Publishers Ltd, Barking, Essex, Inghilterra, 1979.
- [5] E. DRAGONI, G. MEDRI, "Fracture toughness evaluation of natural rubber", Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 10(1988), pp. 79-83.

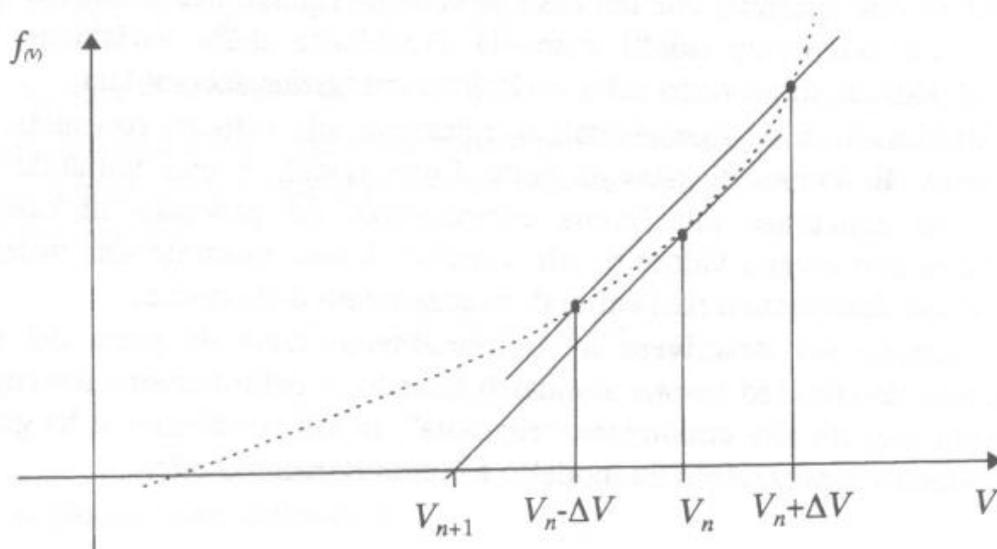


Fig. 1: metodo di Newton per una funzione discreta.

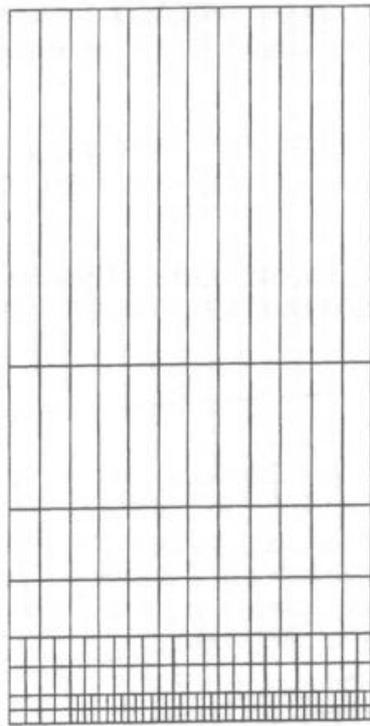


Fig. 2: modello indeformato.

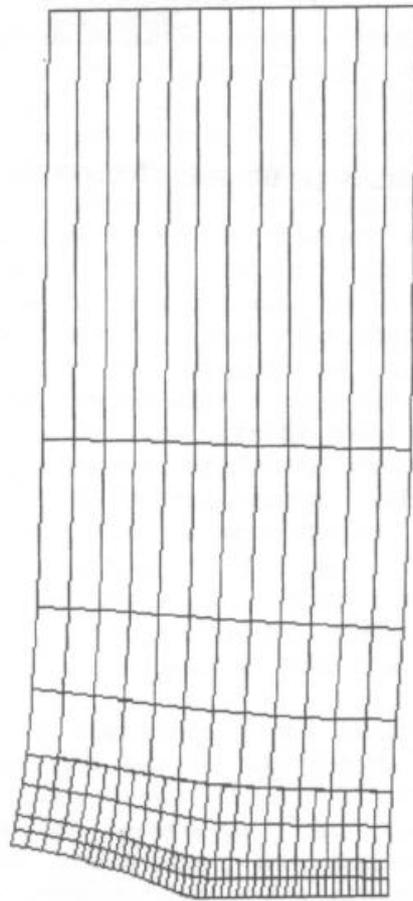


Fig. 3: deformata prima della propagazione.

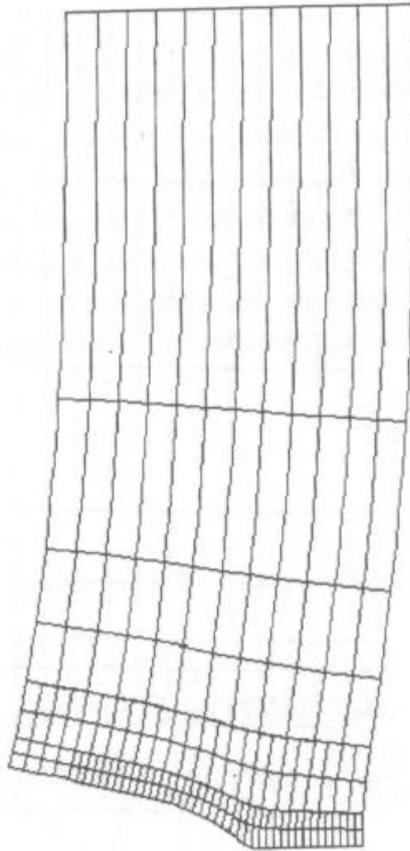


Fig. 4: deformata dopo un passo temporale di avanzamento.