

SUI PUNTI DI BIFORCAZIONE DEL PERCORSO DI EQUILIBRIO DURANTE LA  
CRESCITA DI UNA FESSURA COESIVA

Fabrizio BARPI e Silvio VALENTE

Dipartimento di Ingegneria Strutturale , Politecnico di Torino ,  
10129 Torino

SOMMARIO

Il comportamento non lineare a trazione di alcuni materiali come il calcestruzzo, le rocce, i laterizi ed altri è caratterizzato da incrudimento negativo (strain-softening). Si tratta di materiali instabili secondo Drucker ai quali non sono applicabili i classici teoremi della plasticità. Uno dei modelli più usati in questo campo è quello della fessura coesiva. In molti casi esso è in grado di interpretare i risultati sperimentali sia in termini di carico massimo sia di traiettoria della fessura. Per particolari valori delle condizioni al contorno, possono presentarsi alcuni punti singolari:

- (a) la perdita di definitezza positiva della matrice di rigidità tangente,
- (b) la indeterminazione delle direzioni principali di tensione nell'estremo della fessura fittizia.

Il primo punto singolare può essere superato mediante la tecnica della decomposizione del valore singolare, il secondo mediante il criterio della massima dissipazione energetica. Nel presente lavoro si assume, come esempio, la simulazione numerica di prove sperimentali di frattura eseguite su modelli intagliati di diga a gravità. In questo caso, nel primo punto singolare si conserva l'unicità della soluzione mentre, nel secondo, si manifesta una biforcazione nel percorso di equilibrio. Il carico massimo risulta determinabile univocamente mentre, per quanto riguarda la traiettoria della fessura, sono possibili più soluzioni.

## 1. INTRODUZIONE

I materiali disordinati e fragili come il calcestruzzo, le rocce, i ceramici ecc. contengono un gran numero di difetti e microfessure. Sottoponendo questi materiali ad elevati sforzi di trazione, si verifica una interazione tra i processi di crescita delle microfessure che provoca la localizzazione della deformazione in una banda molto stretta, dove avviene la dissipazione di energia, mentre il materiale, al di fuori di questa banda, si comporta in modo elastico lineare. Secondo i concetti della meccanica del continuo, si può dire che in questa banda, chiamata zona di processo, si verifica una riduzione di capacità portante ( $\dot{\sigma} < 0$ ) come conseguenza di un incremento di deformazione anelastica ( $\dot{\epsilon} > 0$ ) (il punto indica derivazione rispetto al tempo). Questo fenomeno, chiamato incrudimento negativo (strain-softening) rappresenta una violazione del postulato di stabilità di Drucker [1]. La classica teoria della plasticità risulta pertanto inapplicabile. Maier ed altri [2,3,4], studiando le conseguenze di questa violazione, mostrarono come, anche in assenza di effetti instabilizzanti di tipo geometrico, si possano manifestare i fenomeni seguenti :

- perdita di stabilità' in controllo di carico (snap-through),
- perdita di stabilità' in controllo di spostamento (snap-back),
- biforcazione del percorso di equilibrio,
- dipendenza patologica dei risultati dal tipo di reticolo usato nell' analisi numerica.

E' importante osservare che, mentre il materiale nella zona di processo si trova in fase post-critica, la struttura nel suo insieme può trovarsi ancora in fase pre-critica, non avendo ancora raggiunto il carico massimo. Per questo motivo, nonostante le difficoltà menzionate, la presa in conto dell'incrudimento negativo risulta un passo indispensabile per definire un modello meccanico in grado di prevedere la massima capacità portante di una struttura ed altri parametri di risposta di interesse applicativo. In questo contesto, per superare le difficoltà incontrate applicando la teoria della plasticità nello studio della propagazione della fessura nei metalli, Barenblatt [5] e, indipendentemente, Dugdale [6], proposero il modello coesivo. Successivamente Hillerborg ed altri [7] proposero la legge di incrudimento negativo usata nel presente lavoro, sotto il nome

di "modello della fessura fittizia". Quest'ultimo è stato applicato principalmente al calcestruzzo, attraverso un programma di calcolo numerico basato sul metodo degli elementi finiti. Successivamente, applicando il modello della fessura coesiva a problemi di Modo I (Carpinteri [8,9]) e di Modo Misto (Modo I e II) (Carpinteri ed altri [10,11,12], Bocca ed altri [13]), è stato possibile spiegare la transizione da un comportamento duttile ad uno fragile variando solamente la dimensione del provino e conservando inalterati il materiale e tutti i rapporti geometrici. Questo fenomeno può essere messo in relazione ad un rapporto adimensionale, chiamato numero di fragilità  $s_E$  [8,9], che è funzione delle proprietà del materiale e delle dimensioni strutturali.

## 2. IL MODELLO DELLA FESSURA COESIVA

Il modello della fessura coesiva è basato sull'ipotesi che, come continuazione della fessura reale, si formi una fessura fittizia (chiamata anche zona di processo) dove il materiale, sebbene danneggiato, è ancora in grado di trasmettere degli sforzi. Questi ultimi sono funzioni decrescenti della discontinuità di spostamento, come mostrato in fig.1.



Fig. 1: Il modello coesivo rappresenta la zona di processo come un'estensione fittizia della fessura reale.

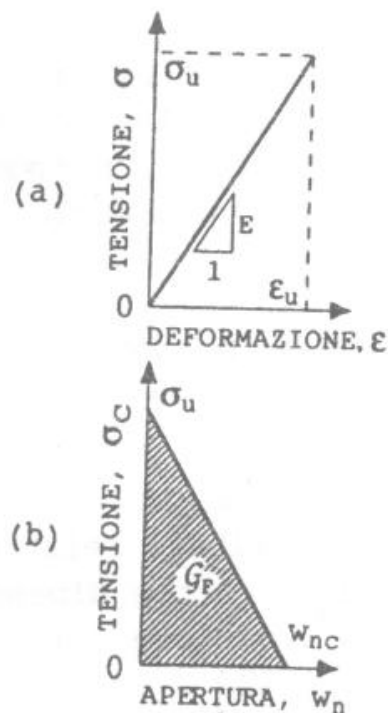


Fig. 2: Doppia legge costitutiva. (a): per il materiale integro, (b) per la fessura fittizia.

Si può quindi affermare che il modello coesivo è basato su una doppia legge costitutiva: la prima si applica al materiale integro ed è la classica relazione elastica lineare tra tensioni e deformazioni (fig.2a), mentre la seconda si applica alla zona di processo e può essere assunta come una relazione lineare tra le tensioni di richiusura,  $\sigma_c$ , e gli spostamenti mutui di apertura  $w_n$  (fig.2b). Questa seconda legge trascura le componenti tangenziali agenti sulla fessura fittizia ( $\tau_c = 0$ ) e richiede che la discontinuità di spostamento  $w_n$  sia funzione crescente del tempo ( $w_n > 0$ ). Si tratta di una ipotesi di prima approssimazione che, tuttavia, è sufficiente ad interpretare molte prove di laboratorio. A questo proposito è importante osservare che le condizioni di vincolo e di carico, relative alle prove di laboratorio, sono studiate in modo che lo spostamento relativo di apertura dell'intaglio sia una funzione monotona crescente del tempo. Essa viene infatti assunta come variabile di controllo delle prove. Per le strutture analizzate, questa condizione di monotonia, richiesta per motivi sperimentali con riferimento alla bocca dell'intaglio, si estende a tutti i punti della fessura fittizia, con notevole semplificazione del modello meccanico (vincolo olonomo).

## 2.1 LE EQUAZIONI DI EQUILIBRIO

Poiché entrambe le leggi costitutive di fig.2 sono di tipo lineare, utilizzando il metodo degli elementi finiti e assumendo come incognita gli  $n$  spostamenti nodali  $u$ , è possibile imporre l'equilibrio attraverso il principio dei lavori virtuali nel modo seguente :

$$Lu = F_1 + \lambda F_2, \quad (1)$$

dove :

- L : matrice simmetrica ( $n \times n$ ) assemblata partendo dai contributi relativi ad entrambe le leggi costitutive,
- $F_1$ : vettore dipendente da  $\sigma_u$ ,  $l_f$ ,  $l_r$  definiti in fig. 1,
- $F_2$ : vettore dei carichi esterni,
- $\lambda$  : moltiplicatore del carico esterno.

Poiché la discontinuità di spostamento può essere presa in conto solo all'interfaccia tra due elementi, poiché in generale la traiettoria della fessura non è nota a priori, è necessario

modificare una porzione del reticolo di elementi finiti ad ogni passo di crescita della fessura. Questa modifica è ottenuta mediante la rototraslazione di una rosetta di elementi finiti (figure 3 e 4) con conseguente generazione automatica di una parte del reticolo. La lunghezza della fessura fittizia ( $l_f$ ) è sicuramente una funzione monotona crescente del tempo durante il processo irreversibile di avanzamento della fessura. Per questa ragione, come suggerito da Carpinteri e Valente [10], essa viene assunta come variabile di controllo nelle simulazioni numeriche.

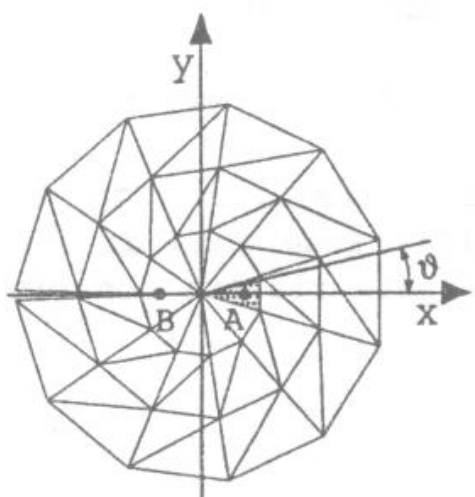


Fig. 3: Ciascuno dei punti A e B può essere assunto come estremo della fessura fittizia.

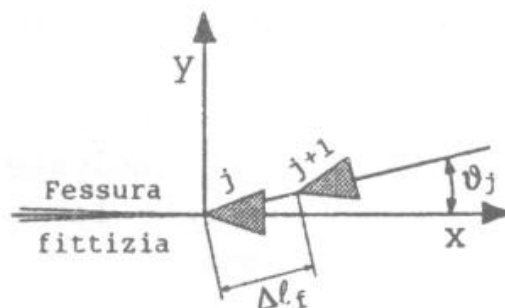


Fig. 4: Due posizioni consecutive dell'estremo della fessura fittizia.

Se la matrice  $L$  risulta non singolare, la presa in conto delle equazioni di equilibrio rende gli spostamenti funzioni solamente di  $\lambda$  ed  $l_r$ :

$$u = u(\lambda, l_r) \quad \sigma = \sigma(\lambda, l_r). \quad (2)$$

Sono quindi necessarie due ulteriori equazioni per determinare  $\lambda$  e  $l_r$ .

## 2.2 LA CONDIZIONE DI AVANZAMENTO DELLA FESSURA FITTIZIA

Il modello coesivo è basato sull'ipotesi che la fessura fittizia si propaghi ortogonalmente alla tensione principale di trazione nel punto dove essa raggiunge la resistenza a trazione del materiale,  $\sigma_u$ . In questo punto, chiamato estremo della fessura fittizia, (abbreviato eff) vale quindi la seguente equazione:

$$\sigma_{\text{eff}} = \left( \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2} \right)_{\text{eff}} = \sigma_u. \quad (3)$$

### 2.3 LA CONDIZIONE DI AVANZAMENTO DELLA FESSURA REALE

Nelle prime fasi del processo evolutivo l'estremo della fessura reale coincide con l'intaglio ( $l_r = 0$ ). Successivamente, quando la discontinuità di spostamento  $w_n$  raggiunge il valore critico  $w_{nc}$ , l'estremo della fessura reale avanza. La condizione in oggetto può quindi essere scritta nel modo seguente :

$$w_n(l_r) < w_c \text{ per } l_r = 0 \text{ oppure } w_n(l_r) = w_c \text{ per } l_r > 0. \quad (4)$$

La (3) e la (4) sono le due equazioni necessarie a determinare le incognite  $\lambda$  ed  $l_r$  indicate nella (2). Esse sono di tipo non lineare e, nel presente lavoro, sono state risolte con procedimento iterativo, mediante successive linearizzazioni [15] (metodo di Newton-Raphson).

### 2.4 I CONTROLLI NECESSARI AL TERMINE DI UN PASSO DI CRESCITA DELLA FESSURA

Dopo aver concluso il calcolo iterativo della lunghezza della zona di processo ( $l_f - l_r$ ), essendo noto il campo degli spostamenti e delle tensioni, è necessario effettuare i seguenti controlli:

$$w_n > 0 \quad \text{per } l_r < s < l_f, \quad (5)$$

$$\sigma_{\text{pt}} < \sigma_u \quad \text{ovunque nel solido,} \quad (6)$$

dove  $\sigma_{\text{pt}}$  rappresenta la tensione principale di trazione. Il significato della disequazione (5) è stato discusso nell'introduzione. Una violazione della (6) può comportare la nascita di una nuova fessura. A questo punto la variabile di controllo  $l_f$ , viene incrementata di una quantità predeterminata,  $\Delta l_f$  (fig.4), nella direzione indicata dal criterio della massima tensione principale di trazione:

$$\vartheta_j = \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y} \right)_j. \quad (7)$$

### 3. I PUNTI DI BIFORCAZIONE DEL PERCORSO DI EQUILIBRIO

Come anticipato nell'introduzione, il materiale in oggetto risulta instabile secondo Drucker. Per questo motivo non valgono i classici teoremi della plasticità ed è quindi necessario analizzare, caso per caso, le proprietà della risposta strutturale. In quanto segue si fa riferimento a condizioni di vincolo e di carico studiate sia dal punto di vista numerico sia da quello sperimentale.

#### 3.1 LA SINGOLARITÀ DELLA MATRICE L

Poiché la matrice L include i contributi della zona di processo, il suo più piccolo autovalore è funzione decrescente di  $l_f$  e crescente di  $l_r$ . Durante l'analisi evolutiva queste due opposte tendenze possono dare luogo a punti singolari ( $\alpha_1 = 0$ , quindi  $\text{Det}(L) = 0$ ) in dipendenza dalle condizioni al contorno e dal numero di fragilità  $s_e$ . Questo aspetto della risposta del modello meccanico è stato riscontrato in tutti i casi studiati e può essere chiarito da un esempio: la prova di flessione su tre punti eseguita secondo le raccomandazioni RILEM [16] (Fig.5).

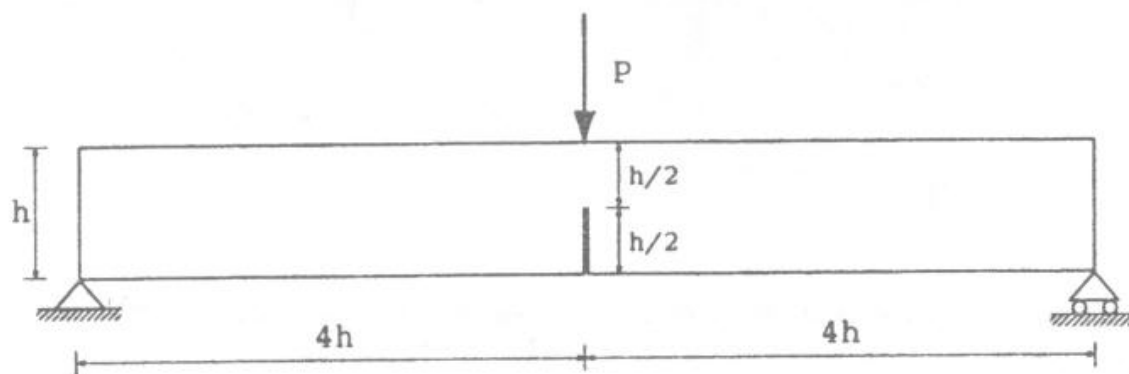


Fig. 5: Schema della prova di flessione su tre punti secondo RILEM [16].

In questo caso, per  $s_e = 2 \cdot 10^{-5}$  la crescita della fessura reale  $l_r$  precede l'annullamento di  $\alpha_1$ . Non vi è quindi alcun punto singolare. Riducendo la sola profondità di intaglio da  $0.5h$  a  $0.2h$  si ottiene che l'annullamento di  $\alpha_1$  avvenga quando risulta ancora  $l_r = 0$  ed il carico è vicino al valore massimo. Da quel punto in avanti la matrice L non risulta più definita positiva. Nell'intorno del punto  $\alpha_1 = 0$ , mediante la decomposizione del valore singolare della matrice L, si può ricavare l'insieme

delle configurazioni che rispettano l'equilibrio e le leggi costitutive (eq.1). In questo insieme ci possono essere più configurazioni che rispettano anche le restanti equazioni (3) e (4) ed in questo caso si parla di punto di biforcazione del percorso di equilibrio. In caso contrario, la soluzione si conserva unica. Dal punto di vista fisico si può affermare che rientrano nella prima famiglia alcuni problemi simmetrici che possono improvvisamente perdere la simmetria oppure alcuni problemi nei quali si può manifestare una seconda fessura, in competizione con la prima. Le prove di flessione su tre punti (fig.5) e quelle di taglio su quattro punti (fig.6) rientrano invece nella seconda famiglia, dove si conserva l'unicità della soluzione. Per un ulteriore approfondimento si rimanda a [14].

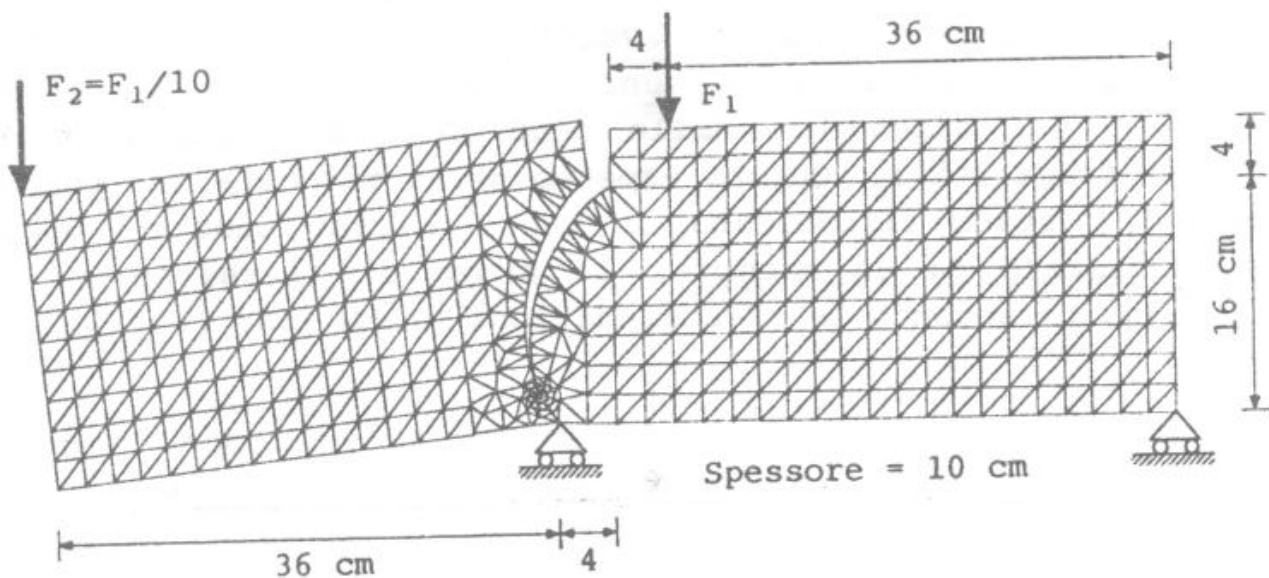


Fig. 6: Schema della prova di taglio su quattro punti (24° passo) (da Carpinteri et al. 1993).

### 3.2 LA SINGOLARITÀ NEL CRITERIO DI DIRAMAZIONE DELLA FESSURA FITTIZIA

Un secondo punto singolare è rappresentato dall'annullamento del denominatore nell'equazione (7). In questo caso il cerchio di Mohr, che rappresenta lo stato tensionale nell'estremo della fessura fittizia, degenera in un punto e la direzione di crescita della fessura fittizia risulta indeterminata. Da questo punto in poi l'equazione (7) non è più applicabile perchè prevede deviazioni angolari eccessive ed oscillanti in segno ( $\pm\pi/2$ ). Per superare queste difficoltà è utile provare diversi valori di  $\vartheta_j$



(variabile definita in fig. 4) e, per ognuno di essi, eseguire l'intero processo iterativo che porta alla determinazione di  $\lambda_j$ . Sia  $\vartheta_{j0}$  il valore che rende minimo  $\lambda_{j+1}$ :

$$\lambda_{j+1}(\vartheta_{j0}) \leq \lambda_{j+1}(\vartheta_j) \quad \forall \vartheta_j \quad (8)$$

La funzione  $\lambda_{j+1}(\vartheta_j)$  può tuttavia presentare più punti di minimo. Per questo, nel seguente lavoro, è stato definito un insieme di possibili direzioni di propagazione :

$$\Theta_j = \left\{ \vartheta_j \mid \left[ \lambda_{j+1}(\vartheta_j) - \lambda_{j+1}(\vartheta_{j0}) \right] / \lambda_{j+1}(\vartheta_{j0}) < 0.02 \right\} \quad (9)$$

La direzione reale di crescita della fessura è stata assunta nell'insieme  $\Theta$  in modo tale da rendere massima la dissipazione energetica nella zona di processo [17,18]:

$$\Psi = t \int_0^{\ell_f} \int_0^{w_n} \sigma(w_n) dw_n d\ell_f \quad (10)$$

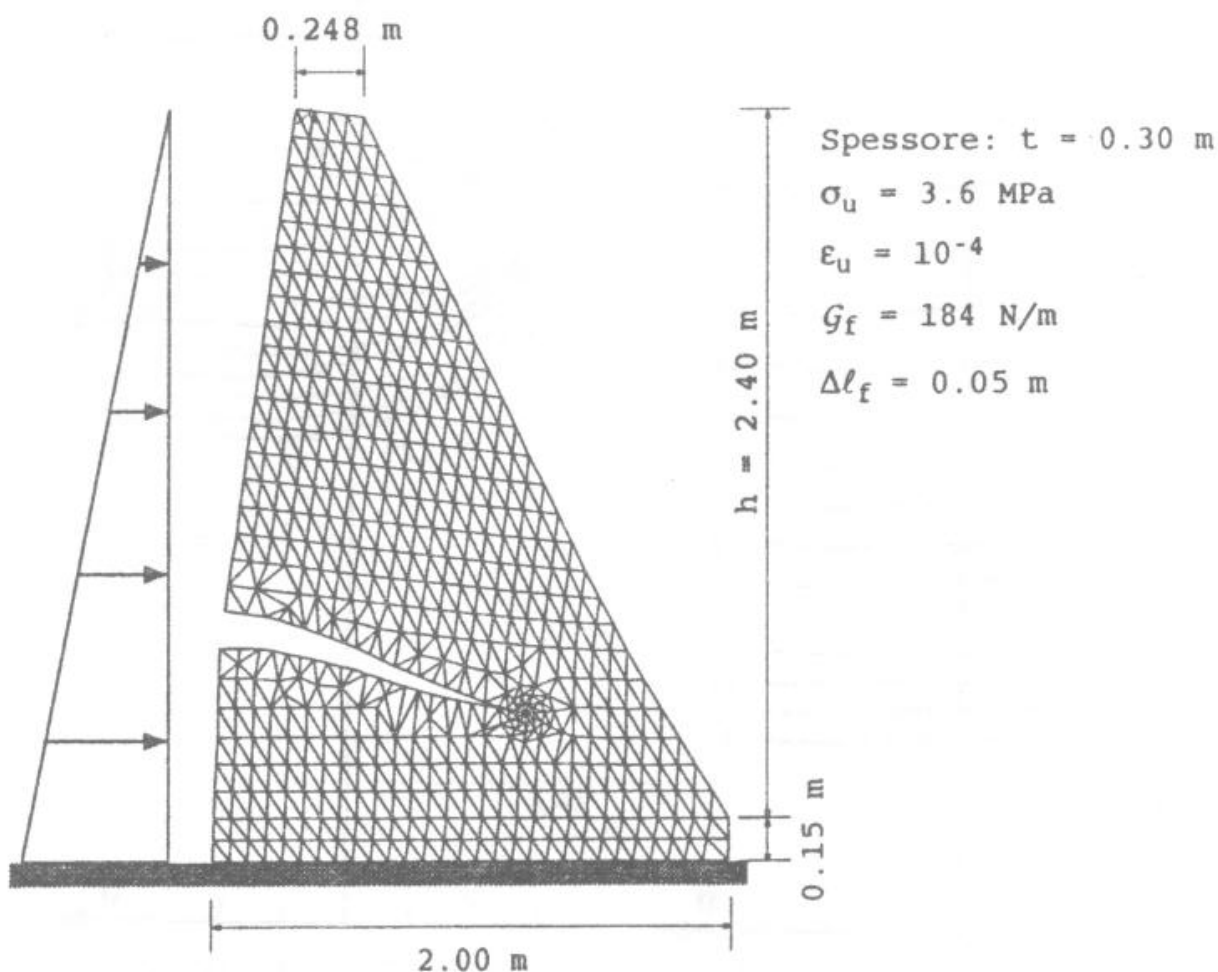


Fig. 7: Il reticolo di elementi finiti usato per interpretare le prove sperimentali eseguite su un modello intagliato di diga a gravità (20° passo, spostamenti amplificati 300 volte).

A titolo di esempio si consideri il modello intagliato di diga a gravità sottoposta a carico idrostatico indicato in fig.7. Per maggiori dettagli sulle modalità sperimentali si rimanda ad [11]. In fig.8 sono riportate le funzioni  $\lambda_j$  per  $j$  variabile da 9 a 23. Assumendo come estremo della fessura fittizia il punto A in fig.3 si ottengono curve con un solo punto di minimo, evidenziato in figura 8a. In questo modo, si ottiene la traiettoria della fessura indicata con le lettere CA in fig.9, e la curva  $\lambda$ -CMOD indicata con le lettere CA in fig.10. Il criterio rappresentato dalle equazioni (8), (9), (10), consente di superare le difficoltà connesse con i valori oscillanti ottenuti con l'equazione (7). Assumendo come estremo della fessura fittizia il punto B in fig.3 si ottengono curve che, per  $j = 9$  presentano due punti di minimo. In base al criterio della massima dissipa-

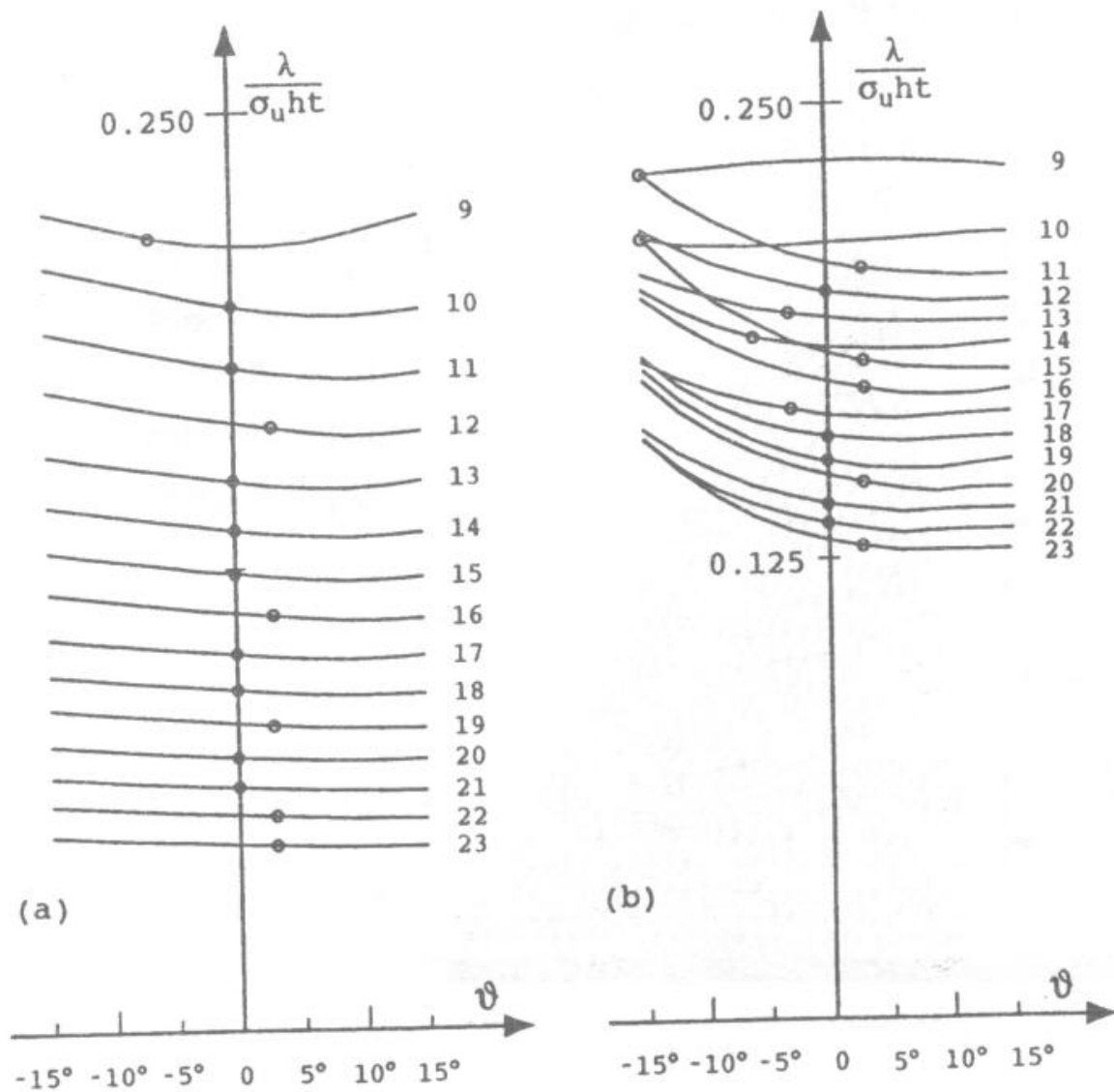


Fig. 8: Funzioni  $\lambda_{j+1}(\theta)$  per diversi valori di  $j$ , per due posizioni dell'estremo della fessura fittizia: (a) coincidente col punto A di Fig. 3; (b) coincidente col punto B.

zione energetica è stato scelto il valore di  $\vartheta$  evidenziato in fig.8b. In questo modo si ottiene una diversa traiettoria della fessura, indicata con le lettere CB in fig.9, ed una diversa curva  $\lambda$  - CMOD indicata con le lettere CB in fig.10. In questo caso si può concludere che il problema ha unicità di soluzione solo nella prima parte della propagazione della fessura, cioè nel tratto DC. In questa parte è compreso un parametro molto importante per le applicazioni: il carico massimo.

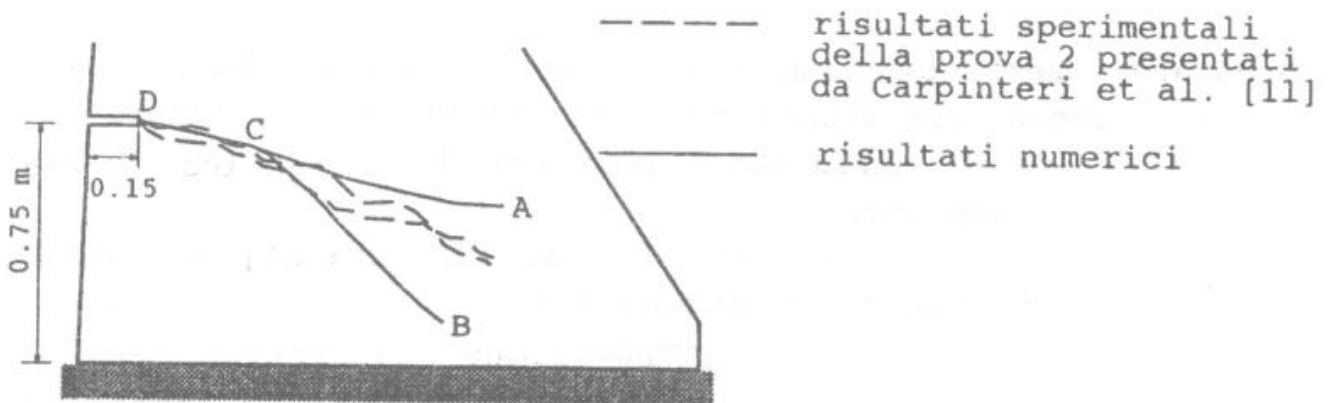


Fig. 9: Traiettorie della frattura. DC: criterio dello sforzo principale massimo [eq. (7)]; CA: eq. (9) e (10) applicate al punto A di Fig. 3; CB: idem, al punto B.

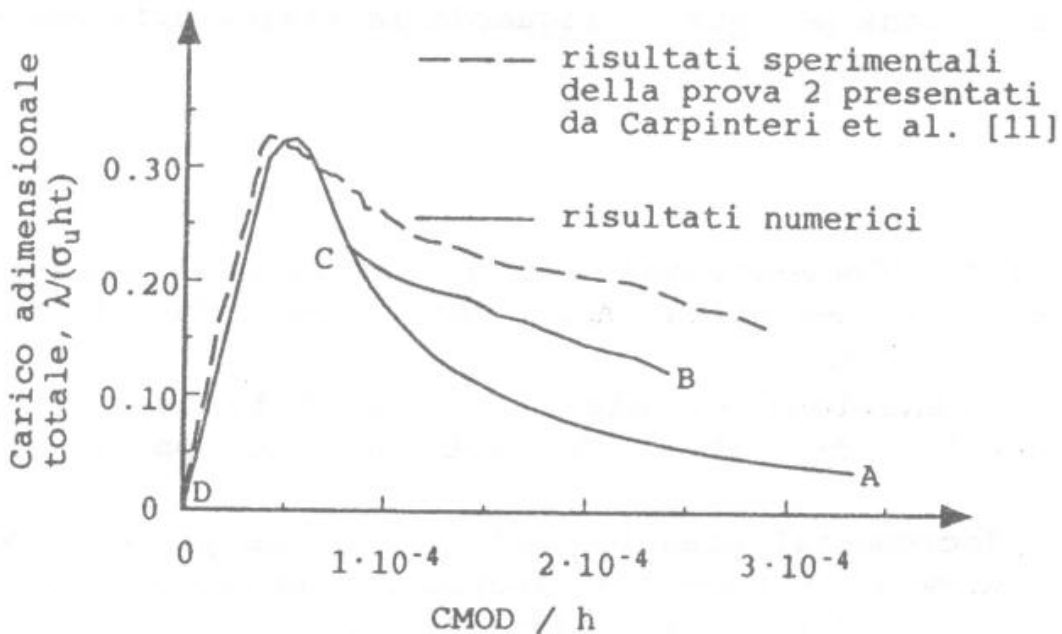


Fig. 10: Diagrammi di CMOD adimensionale in funzione del carico adimensionale. DC: criterio dello sforzo principale massimo [eq. (7)]; CA: eq. (9) e (10) applicate al punto A di Fig. 3; CB: idem, al punto B.

#### 4. CONCLUSIONI

- La presa in conto dell'incrudimento negativo (strain-softening) è un passo indispensabile per prevedere correttamente il carico massimo ed altri parametri della risposta strutturale.

- Un materiale che presenta incrudimento negativo risulta instabile secondo Drucker. Per questo non sono applicabili i classici teoremi della plasticità ed i singoli problemi devono essere analizzati caso per caso.

- Studiando questi problemi con il modello della fessura coesiva si possono incontrare alcuni punti singolari caratterizzati da :

(a): perdita di definitezza positiva della matrice di rigidità tangente,

(b): indeterminatezza delle direzioni principali di tensione nell'estremo della fessura fittizia.

Nel caso (a) è utile la decomposizione del valore singolare della matrice di rigidità tangente, nel caso (b) è utile l'applicazione del criterio della massima dissipazione energetica.

- Nell'esempio analizzato nel presente lavoro, nel primo punto singolare si conserva l'unicità della soluzione mentre, nel secondo, si ha una biforcazione del percorso di equilibrio. Il carico massimo risulta determinabile univocamente mentre sono possibili più soluzioni per quanto riguarda la traiettoria della fessura.

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] Drucker, D.C. 'Conventional and unconventional plastic response and representation' *Appl. Mech. Rev.*, Vol. 41 No. 4, pp. 151-167, 1988.
- [2] Maier, G. 'Behaviour of elastic-plastic trusses with unstable bars' *J. Eng. Mech.*, A.S.C.E. Vol. 92, pp. 67-91, 1966.
- [3] Maier, G. 'Incremental plastic analysis in the presence of large displacements and physical instabilizing effects' *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 7, pp. 345-372, 1971.
- [4] Maier, G., Zavelani, A. and Dotreppe, J.C. 'Equilibrium branching due to flexural softening' *J. Eng. Mech. Div.*, A.S.C.E. Vol. 89, pp. 897-901, 1973.
- [5] Barenblatt, G.I. 'The formation of equilibrium cracks during brittle fracture: general ideas and hypotheses. Axially-

- symmetric cracks.' *J. Appl. Math. Mech.*, Vol. 23, pp. 622-636, 1959.
- [6] Dugdale, D.S. 'Yielding of steel sheets containing slits' *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 8, pp. 100-104, 1960.
- [7] Hillerborg, A., Modeer, M. and Petersson, P.E. 'Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements' *Cement Concrete Res.*, Vol. 6, pp. 773-782, 1976.
- [8] Carpinteri, A., 'Interpretation of the Griffith instability as a bifurcation of the global equilibrium' *Application of Fracture Mechanics to Cementitious Composites* ed. Shah, S.P., pp. 284-316, Martinus Nijhoff, 1985.
- [9] Carpinteri, A. 'Size effects on strength, toughness and ductility' *J. Eng. Mech.*, A.S.C.E. Vol. 115 n. 7, pp. 1375-1392, 1989.
- [10] Carpinteri, A. and Valente, S. 'Size-scale transition from ductile to brittle failure: a dimensional analysis approach' *Cracking and Damage* ed. Mazars, J. and Bazant, Z. P., pp. 477-490, Elsevier Applied Science, 1988.
- [11] Carpinteri, A., Valente, S., Ferrara, G. and Imperato, L. 'Experimental and numerical fracture modelling of a gravity dam' *Fracture Mechanics of Concrete Structures* ed Bazant Z.P., pp. 351-360, Elsevier Applied Science, 1992.
- [12] Carpinteri, A., Valente, S., Ferrara, G. and Melchiorri, G. 'Is mode II fracture energy a real material property?' *Computers and Structures*, Vol. 48 no. 3, pp. 397-413, 1993.
- [13] Bocca, P., Carpinteri, A. and Valente, S. 'Mixed-mode fracture of concrete' *Int. J. Solids Structures*, Vol. 27, pp. 1139-1153, 1991.
- [14] Valente, S. 'Bifurcation phenomena in cohesive crack propagation' *Computers and Structures*, Vol. 44 no.1/2, pp. 55-62, 1992.
- [15] Valente, S. 'Heuristic softening strip model in the prediction of crack trajectories' *Theor. Appl. Fracture Mech.*, Vol. 19, pp. 119-125, 1993.
- [16] RILEM Technical Committee50, 'Determination of the fracture energy of mortar and concrete by means of three-point bend tests on notched beams', Draft Recommendation, *Material and Structures*, Vol. 18, pp. 287-290, 1985.
- [17] Hill, R. 'A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids', *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 6, pp. 236-249, 1958.
- [18] Nguyen, Q. S. 'Bifurcation and post-bifurcation analysis in plasticity and brittle fracture', *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 35, 3, pp. 303-324, 1987.