

## Valutazione della *Energy Release Rate* in materiali elastoplastici includenti in presenza di propagazione.

Marco Oriunno

Dipartimento di Ingegneria Aerospaziale, Via Diotisalvi 2, 56126 Pisa.

### SOMMARIO:

E' stata simulata, con il metodo degli elementi finiti, la propagazione di una fessura all'interno di provini CCP, utilizzando le equazioni costitutive della plasticità incrementale per materiali includenti. Il codice agli elementi finiti NOSA, sviluppato per l'analisi non lineare, è stato modificato per simulare la propagazione rimuovendo i vincoli sui nodi in prossimità dell'apice. Le reazioni vincolari corrispondenti sono state rilassate in tre passi di carico. La possibilità di caratterizzare l'innescò della crescita con un valore critico della apertura della fessura ha imposto la scelta un criterio di propagazione basato sul CODT ottenuto su basi sperimentali. Assegnando una storia di carico monotona e incrementale, la fessura ha propagato qualora fosse soddisfatto il criterio di propagazione. E' stata in precedenza definita la *Energy Release Rate* ponendo un bilancio di energia meccanica, valido per materiali elastoplastici comunque includenti. L'espressione della ERR è composta da un integrale di linea, equivalente all'integrale di Rice, e da un integrale di area rappresentativo dei meccanismi plastici. La possibilità di utilizzare un bilancio di energia è basata su alcuni risultati della plasticità incrementale infinitesima secondo i quali è possibile porre in forma chiusa l'espressione del lavoro degli sforzi interni  $W$ .

Sono stati indagati, a parità di geometria, diversi modelli di includimento sia isotropo sia cinematico che misto. In tutti i casi si è evidenziato come il meccanismo di propagazione, pur in condizioni di *small scale yielding*, determina localmente una storia di carico non più monotona con la presenza di deformazioni residue che diventano essenziali per la valutazione della ERR.

### Introduzione.

La crescita di cricche in materiali elastoplastici implica dissipazione di energia sia per la creazione di nuove superfici di frattura sia per i meccanismi di deformazione residua. La comprensione del processo di dissipazione energetica può fornire uno strumento per lo sviluppo di materiali più tenaci oltre che per la previsione dell'energia assorbita durante la rottura. Sono stati compiuti numerosi studi sull'energia dissipata durante la propagazione.

Turner[1] ha ipotizzato che l'energia totale dissipata sia la somma dell'energia di separazione della fessura e dell'energia plastica dissipata

durante la propagazione. Tale rappresentazione é basata su argomenti di tipo euristico senza alcuna prova matematica.

Shivakumar e Crews [2] hanno condotto un'analisi elasto-plastica su provini CT adottando lo schema di Turner, corredandolo di una maggiore supporto matematico e aggiungendo all'energia dissipata un termine dovuto all'energia di deformazione residua all'apice.

L'obiettivo di questo lavoro é stato lo sviluppo di una procedura analitica per definire e valutare l'energia dissipata durante la fase di propagazione partendo da un bilancio di energia meccanica dal punto di vista della meccanica dei continui.

E' stata implementata una procedura di analisi agli elementi finiti di tipo bidimensionale e elasto-plastica su di una geometria CCT. Sono stati utilizzati elementi plain-strain ad 8 nodi. La frattura é stata simulata numericamente impiegando il criterio del CTOD. La fessura é stata fatta propagare rilasciando gradualmente le forze applicate all'apice. L'analisi é stata effettuata secondo diversi modelli di incrudimento.

### Simulazione della propagazione

E' stato utilizzato il codice agli elementi finiti NOSA sviluppato presso il CNUCE di Pisa e sviluppato esplicitamente per l'analisi di materiali non lineari[3]. L'analisi é stata condotta con elementi *plain-strain* a 8 nodi nelle ipotesi di deformazioni infinitesime e adottando il criterio di snervamento di Von Mises. Il programma é stato modificato al fine di modellare la propagazione. Poiché il problema é doppiamente simmetrico é stato modellato solo un quarto dell'intero pannello con 498 elementi e 1441 nodi(fig.4). Il pannello é stato caricato nella parte superiore con un carico distribuito seguendo una storia di carico monotona portando a snervamento dapprima l'apice e procedendo successivamente per incrementi proporzionali al carico di primo snervamento. Nei casi in cui sia stato soddisfatto il criterio di propagazione, il carico esterno é stato mantenuto costante.

Per modellare la propagazione é stata apportata una modifica al NOSA introducendo una subroutine per la gestione dei vincoli esterni. Raggiunta la condizione di snervamento, vengono rimossi i vincoli sui nodi dell'elemento interessato al rilascio e le reazioni vincolari corrispondenti sono applicate come carichi esterni al fine di mantenere

la fessura chiusa e soddisfare l'equilibrio del sistema. Successivamente i carichi esterni rappresentativi delle reazioni vincolari vengono rilassati in 3 fasi al fine di riportare in equilibrio il sistema(fig.1).

In una fase preliminare del lavoro è stato osservato che un numero di step superiore a 3 per rilassare le reazioni vincolari sono ininfluenti per la simulazione, mentre, al fine di diminuire la distorsione degli elementi e non innescare oscillazioni numeriche indesiderate, si è reso opportuno rilasciare due nodi contemporaneamente.

### Determinazione del CTOD

Sia da Begley e Landes[4] nel '72 sia da Shih[5] è stato mostrato con contributi teorici e sperimentali che l'innescò della propagazione può essere caratterizzato da un valore critico del CTOD ( $\delta_{IC}$ ). Ciò ha comportato la caratterizzazione della crescita attraverso curve di resistenza del tipo  $\delta$ -curve. Rice Drugan e Sham [6] hanno analizzato il campo di tensione all'apice in condizioni di propagazione supponendo un materiale elasto-plastico. In accordo con Rice e Sorensen[7] è stata evidenziata la relazione tra il CODT ed il parametro J, equivalente all'integrale di Rice[8], che correla il campo di deformazione locale a quello asintotico:

$$\delta = a \frac{J}{\sigma_0} + \beta \frac{\sigma_0}{E} a \ln \frac{R}{r} \quad (1)$$

in cui  $a$  è la lunghezza di fessura,  $\beta$  e  $R$  costanti caratteristiche del problema e  $r$  la distanza dall'apice della fessura.

Il ruolo determinante nel fenomeno di propagazione stabile ha imposto il CTOD come un opportuno criterio di propagazione. La stima del valore necessario alla propagazione è stata fatta su basi empiriche, in quanto è evidente come debba essere ricavato da osservazioni sperimentali. Newman [9] ha determinato  $\delta_{IC}$  riproducendo analiticamente la curva sperimentale carico-lunghezza di fessura per provini *Compact Tension*.

In questo studio è stato utilizzato un  $\delta_{IC}$  equivalente a due volte lo spostamento verticale del nodo libero prossimo all'apice, che per la topologia della mesh è posto alla distanza di 1 mm.

La condizione critica é stata fissata in corrispondenza di un fattore di intensificazione degli sforzi  $K_{Ic} = 17 \text{ Mpa}\sqrt{\text{m}}$ , ottenuto da dati sperimentali [10].

### Definizione della Energy Release Rate

La spiegazione dei fenomeni di frattura in termini di bilancio energetico poggia le sue basi nel classico lavoro di Griffith [11], che ha posto un criterio valido per materiali fragili uguagliando la variazione di energia elastica con l'energia necessaria a creare una nuova superficie di frattura. L'estensione del criterio di Griffith a materiali costitutivamente non lineari è stata fatta da Rice[12] nel '66 definendo un approccio energetico dal punto di vista della meccanica dei continui. Nell'ambito di questo studio servendosi dell'approccio proposto da Rice é stata definita la *ERR* ponendo un bilancio di energia meccanica proposto da Lucchesi Frediani e Chiarelli[13], di cui si riporta una breve descrizione.

Si consideri un corpo bidimensionale in cui sia presente una fessura(fig.2);  $a$  é la lunghezza della fessura, e la direzione di propagazione,  $\Omega_\delta$  é una regione circolare di raggio " $\delta$ " attorno l'apice,  $B$  é la configurazione del corpo e  $B_\delta = B - \Omega_\delta$ .

Si consideri un processo in cui la fessura cresca regolarmente nel tempo e quindi può essere posto:

$$\dot{u} = \frac{\partial u(x,a)}{\partial a} \quad \dot{W} = \frac{\partial W(x,a)}{\partial a} \quad (3)$$

dove  $W = \int_0^\tau T \cdot \dot{E} d\tau$ ,  $T$  é il tensore di Cauchy <sup>(1)</sup> e  $E$  il tensore di

deformazione infinitesima.;

Vengono poste delle ipotesi sui campi  $u(x,a)$ ,  $T(x,a)$ , e  $W(x,a)$ :

- (a)  $u$  é di classe  $C^2$  nell'intorno dell'apice.
- (b)  $T$  e  $W$  sono  $C^1$  nell'intorno dell'apice.

---

(1) Dati i due tensori  $A$  e  $C$ , si definisce prodotto interno  $A \cdot C$  la quantità scalare  $\text{tr}(A^T C)$  dovè é la somma dei termini della digonale del tensore  $A^T C$ .

(c)

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{B_\delta} W da = \int_B W da \quad (4)$$

e cioè, la densità di energia di deformazione  $W$  è regolare intorno l'apice quando  $\Omega$  tende a zero..

(d) la quantità  $\int W da$  è differenziabile rispetto ad  $a$ :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{d}{da} \int_{B_\delta} W da = \frac{d}{da} \int_B W da \quad (5)$$

(e) 
$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\partial \Omega_\delta} T n_i ds = 0 \quad (6)$$

Si assume un campo di tensione con singolarità  $\delta^\alpha$ , dove  $-1 < \alpha < 0$ .

Se in un intervallo di tempo non c'è propagazione :

$$-\frac{d}{dt} \int_B W da + \int_{\partial B} T v_i u_i ds = 0 \quad (7)$$

Se la fessura avanza è necessario considerare l'energia rilasciata:

$$G(a) = -\frac{d}{da} \int_B W da + \int_{\partial B} T v_i u_i ds = 0 ; \quad (8)$$

Assunte le ipotesi enunciate, si dimostra [13] :

$$G(a) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\partial \Omega_\delta} (W I - \nabla u^T T) n ds \quad (9)$$

La (10) è valida qualsiasi siano le equazioni costitutive purché *rate independent*. Nel caso di materiali elastoplastici tale relazione è fortemente non lineare e dipende dalla storia di carico seguita.

Se si definisce una curva regolare  $\Gamma$  che circonda la fessura, si può definire la quantità:

$$J(\Gamma) = e \cdot \int_{\partial\Omega_\delta} (W I - \nabla u^T T) n ds \quad (10)$$

che può essere considerata la generalizzazione dell'integrale di Rice[14] a materiali elastoplastici. La (10) diventa quindi per un generico circuito  $\Gamma$ :

$$G(a) = J(\Gamma) - e \int_L \text{div}(W I - \nabla u^T T) dR \quad (11)$$

dove  $L$  è l'intersezione tra la regione  $B_\zeta$  in cui è avvenuta la plasticizzazione e la regione racchiusa da  $\Gamma$ (fig.3).

Per materiali elastici e lineari  $W$  è un potenziale ed è:

$$W = \frac{1}{2} T \cdot E \quad (12)$$

Qualora si abbiano materiali elastoplastici comunque incrudenti è possibile ottenere un'espressione in forma chiusa di  $W$  nell'ambito della plasticità incrementale infinitesima.

Definiti il tensore simmetrico di deformazione infinitesima  $E(\tau)$  e il tensore deviatorico di deformazione plastica  $E^P(\tau)$ , l'equazione costitutiva diventa:

$$T(\tau) = T[E(\tau) - E^P(\tau)] = 2\mu[E(\tau) - E^P(\tau)] + [\lambda \text{tr}(E(\tau))]I \quad (13)$$

Viene definito il parametro di Odqvist  $\zeta$  non decrescente, lunghezza della traiettoria descritta dal tensore  $E^P$ :

$$\zeta(\tau) = \int_0^\tau \|\dot{E}^P\| d\tau \quad (14)$$

E' accettato inoltre il criterio di Von Mises per cui il dominio elastico  $E(\tau)$  è cilindrico :

$$E(\tau) = \{ E \in \text{Sym} \mid \|E_0 - C_E(\tau)\| < \rho[\zeta(\tau)] \} \quad (15)$$

dove  $\rho[\zeta(\tau)]$  é una funzione scalare non decrescente a valori reali, rappresentativa del raggio del dominio elastico;  $C_E(\tau)$  é un tensore deviatorico rappresentativo del centro del dominio elastico. Si suppone inoltre che esiste una costante  $\eta > 0$ :

$$C_E(\tau) = (1+\eta)E^P(\tau) \quad (16)$$

Per ogni storia di carico seguita, il lavoro delle forze interne é:

$$W(\tau) = \int_0^\tau \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{E}} d\tau, \quad (17)$$

E' possibile dimostrare che:

$$W(\tau) = \frac{1}{2} [\mathbf{E}(\tau) - \mathbf{E}^P(\tau)] \cdot \mathbf{T} [\mathbf{E}(\tau) - \mathbf{E}^P(\tau)] + \mu\eta \|\mathbf{E}^P(\tau)\|^2 + 2\mu\omega(\zeta(\tau)) \quad (18)$$

dove  $\omega(\zeta(\tau))$  é la primitiva di  $\rho(\zeta(\tau))$  tale che  $\omega(0)=0$ .

La possibilità di disporre del bilancio di energia (13) e dell'espressione in forma chiusa del lavoro delle forze interne (20) consente di poter analizzare la propagazione quasi-statica della fessura sottoposta a storie di carico non necessariamente monotone, sia su macroscale (carichi esterni) che microscale (scarichi residui all'apice in seguito ad avanzamento).

### Risultati.

E' stata considerata una configurazione di riferimento (fig.5) di perfetta plasticità in cui il materiale, in seguito a snervamento non é più in grado di incrudire. In fig.6 é riportata la *ERR*, suddivisa nelle sue componenti, rispetto la propagazione avvenuta. I risultati ottenuti mostrano un predominanza dell'integrale di area di tipo monotono rispetto la crescita della fessura. Nella fase iniziale di crescita, l'integrale

di area si mantiene nullo in coerenza con i risultati dello "small scale yielding". Nelle fasi successive, pur mantenendo valide le ipotesi di validità della limitata estensione della zona plastica, il contributo del termine di area diventa fondamentale.

Ciò é imputabile alla presenza di zone localizzate di scarico della tensione dovute alla propagazione. Diventa essenziale quindi la storia di carico localmente seguita dal materiali che, nel modello di plasticità incrementale adottata, é racchiusa nel parametro di Odqvist. L'incompatibilità del modello di "small scale yielding" con quello adottato in questo lavoro, meglio rappresentativo della realtà fisica, é dovuta all'esclusione di fenomeni di scarico locali all'apice, come previsto nella teoria della deformazione. In realtà la possibilità su macroscala di imporre al materiale storie di carico esterne monotone crescenti non implica localmente la stesso comportamento. ciò é limitatamente vero finché non si ammetta la propagazione della fessura. In fig.6 é riportato il valore della *ERR* calcolato secondo il modello elastico:

$$G = \frac{\sigma_n^2 \pi a}{E} (1 - \nu^2)$$

dove  $\sigma_n$  é la tensione nominale applicata e  $a$  la lunghezza corrente della fessura.

La soluzione elastica e il valore dell'integrale di linea coincidono finché il termine di area é nullo. Infatti, essendo quest'ultimo rappresentativo dei fenomeni plastici dissipativi, fornisce una misura della approssimazione che si ottiene utilizzando la soluzione elastica. E' stato dimostrato in precedenza [14] come che considerando un modello in cui la fessura non propaghi, l'effetto del termine dissipativo é di scarso contributo alla *ERR*, nonostante la zona plastica sia estesa. Shivakumar e Crews [cit.], in un modello di propagazione, hanno correlato la crescita dell'energia dissipata plasticamente con la crescita delle dimensioni della zona plastica all'apice. Tale descrizione appare riduttiva del fenomeno di dissipazione in quanto, i risultati ottenuti ed il modello adottato in questo lavoro, correla la crescita dell'energia dissipata anche all'effetto di scarico locale del materiale.

Infatti, l'analisi dello stato di tensione evidenziato in fig.6, evidenzia sia una limitata crescita della zona plastica sia una sua traslazione in seguito alla propagazione.

### Modelli di incrudimento.

E' stata valutata la *ERR* per la stessa geometria, ma con diversi modelli di incrudimento. La possibilità di definire un modello di incrudimento all'interno del codice utilizzato é data dalle relazioni che descrivono l'evoluzione del centro (incrudimento cinematico) e del raggio (incrudimento isotropo) della superficie cilindrica di snervamento. La curva base del materiale utilizzato é quella di una tipica lega di alluminio(fig.7).

In fig.8a,b,c sono riportati gli andamenti dei termini di linea e dia area per diversi modelli di incrudimento. In tutti i casi é stato considerato lo stesso  $\delta_c=0.02\text{mm}$  consentendo al provino di mantenere costante il carico esterno qualora ci siano condizioni di propagazione e di aumentarlo in altro caso. E' stato ottenuto lo stesso valore dell'integrale di linea a conferma della non adeguatezza di tale parametro a tener conto degli effetti di incrudimento verificatisi in seguito allo scarico locale del materiale. Una sensibile differenza é stata invece riscontrata nell'integrale di area. La condizione di perfetta plasticità si é dimostrata la più sensibile agli effetti dissipativi rispetto alle condizioni di incrudimento pure o mista. L'effetto sulla *ERR* si evidenzia con un appiattimento della curva  $G-\Delta a$  e con una diminuzione dell'energia disponibile alla frattura.

Sono state evidenziate le caratteristiche della *ERR* nel caso di materiali incrudenti in condizioni di propagazione, ed é stata osservato come l'effetto di scarico locale della tensione diventi determinante ai fini della *ERR*. L'energia dissipata plasticamente quindi non é imputabile solo all'estensione della zona plastica quanto alla sua traslazione all'interno del materiale e allo scarico localizzato dello stato di tensione. A suffragare tali assunti é stato evidenziata una forte dipendenza della *ERR* dai modelli di incrudimento utilizzati. Ulteriori sviluppi della ricerca saranno mirati alla correlazione del CTOD con l'incrudimento e all'indagine qualitativa su geometrie diverse come i provini Compact Tension.

**Ringraziamenti:** Il lavoro é stato finanziato con i fondi del Progetto Nazionale quota 40% dal titolo "Problemi di meccanica dei materiali compositi e innovativi". L'autore ringrazia Giovanni Novembrini per la preziosa collaborazione offerta nel raggiungimento dei risultati.

### Bibliografia:

[1]Turner, C. E. , "Description of Stable and Unstable crack Growth in the Elastic Plastic Regime in Terms of  $J_r$  Resistance Curve." Fracture Mechanics, ASTM STP 677, 1979, pp. 614-628.

[2]Shivakumar K. N., Crews J. H., "Energy Dissipation Associated with Crack Extension in an Elastic-Plastic Material.", Engineering Fracture Mechanics Vol. 28, No. 3, pp. 319-330, 1987.

[3]Guidotti P., Lucchesi M., Pagni A., Pasquinelli G., "Elastic-Plastic Behaviour with Work-Hardening: an Appropriate Model for Structural Software.", Meccanica No 19, 1984.

[4]Begley J., Landes J. D., "Fracture Toughness" ASTM-STP-514, 1972

[5]Shih C. F., "Relationship between the J-integral and the Crack Opening Displacement For Stationary and Extending Crack", J. Mech. Phys. Solids, Vol. 29, N.4, pp. 305-326, 1981.

[6]Rice J. R., Drugan W. J., Sham T. L., "Elastic-plastic Analysis of Growing Cracks", Fracture Toughness, ASTM-STP-700, pp 189 -221, 1980.

[7]Rice J. R., Sorensen E. P., "Continuum Crack-Tip Deformation and Fracture for Plane-Strain Crack Growth in Elastic-Plastic Solids", J. Mech. Phys. Solids, Vol. 2è, N.4, pp. 163-186, 1978.

[8]Rice J. R. "A path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks", J. Appl Mech., Vol. 35, pp.379-386, 1968.

[9]Newmann J. C. Jr, "An Elastic-Plastic Finite Element Analysis of Crack Initiation, Stable Crack Growth, and Instability", Fracture Mechanics ASTM-STP-833, pp93-117, 1984.

[10]Kauffman J., "Design of Alluminum Alloys for High Toughness and High Fatigue Strenght", AGARD Conference on Alloy Design For Fatigue And Fractur Resistance, 1975.

[11]Griffith A. A., "The Phenomena of Flow and Rupture in Solids", Phil. Trans. Roy. Soc. London, A221, 1921.

[12]Rice J. R., "Proceedings of the First International Conference on Fracture", pp 309-340, 1966.

[13]Chiarelli M., Frediani A., Lucchesi M., "On the Crack Extension Energy Rate in Elastic-plastic Fracture Mechanics" in Defect Assessment in Components - Fundamentals and Applications, edited by J. Blauel and K.H. Schwalbe - MEP, London, 1991.

[14]Chiarelli M., Frediani A., Lucchesi M., "The Role of Plasticity in fatigue and Fracture Mechanics of Metallic Materials", Reprints of the 18th ICAS Congress, Beijing, September 1992.

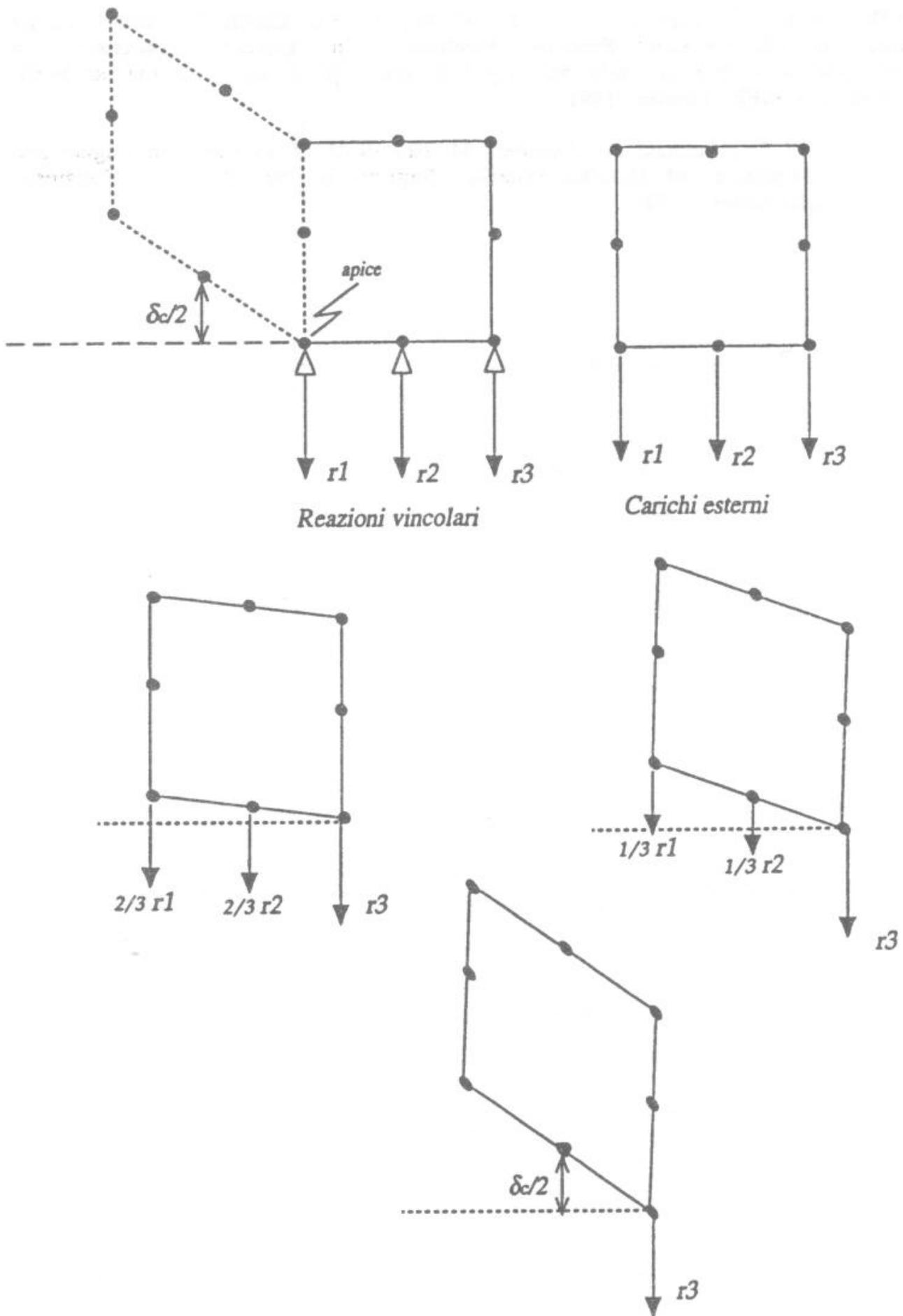


fig.1 Fasi di rilassamento delle reazioni vincolari.

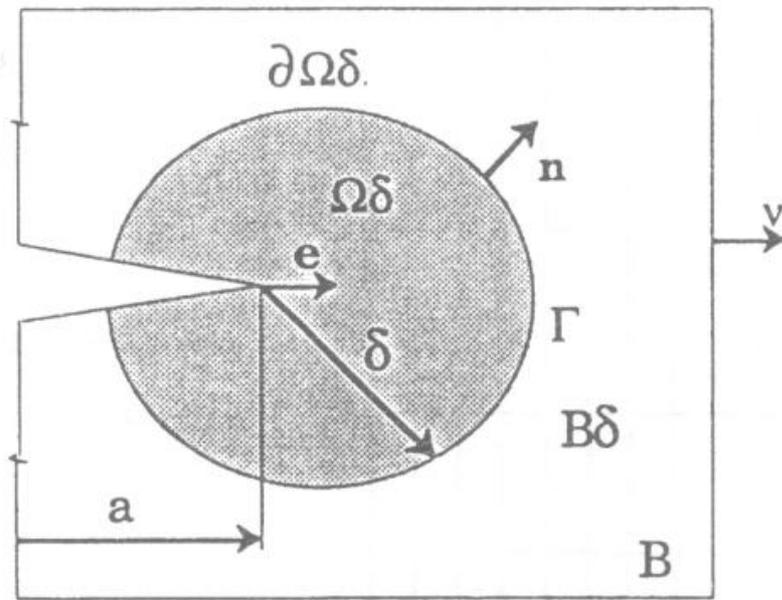


fig.2 Corpo fessurato.

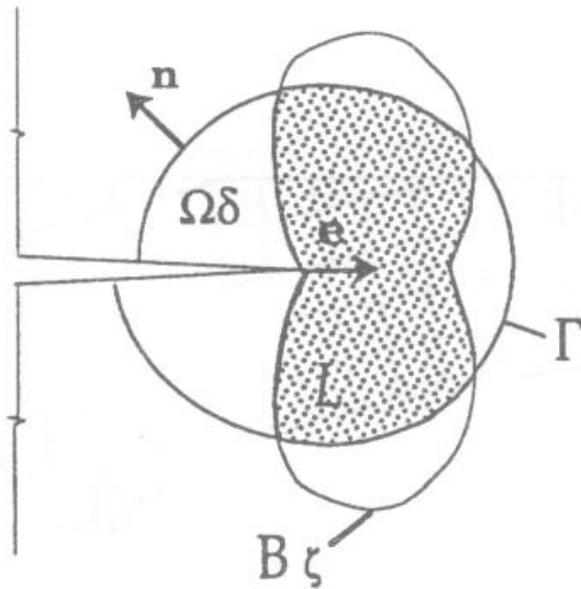


fig. 3 Intersezione del circuito  $\Gamma$  con la zona plasticizzata.

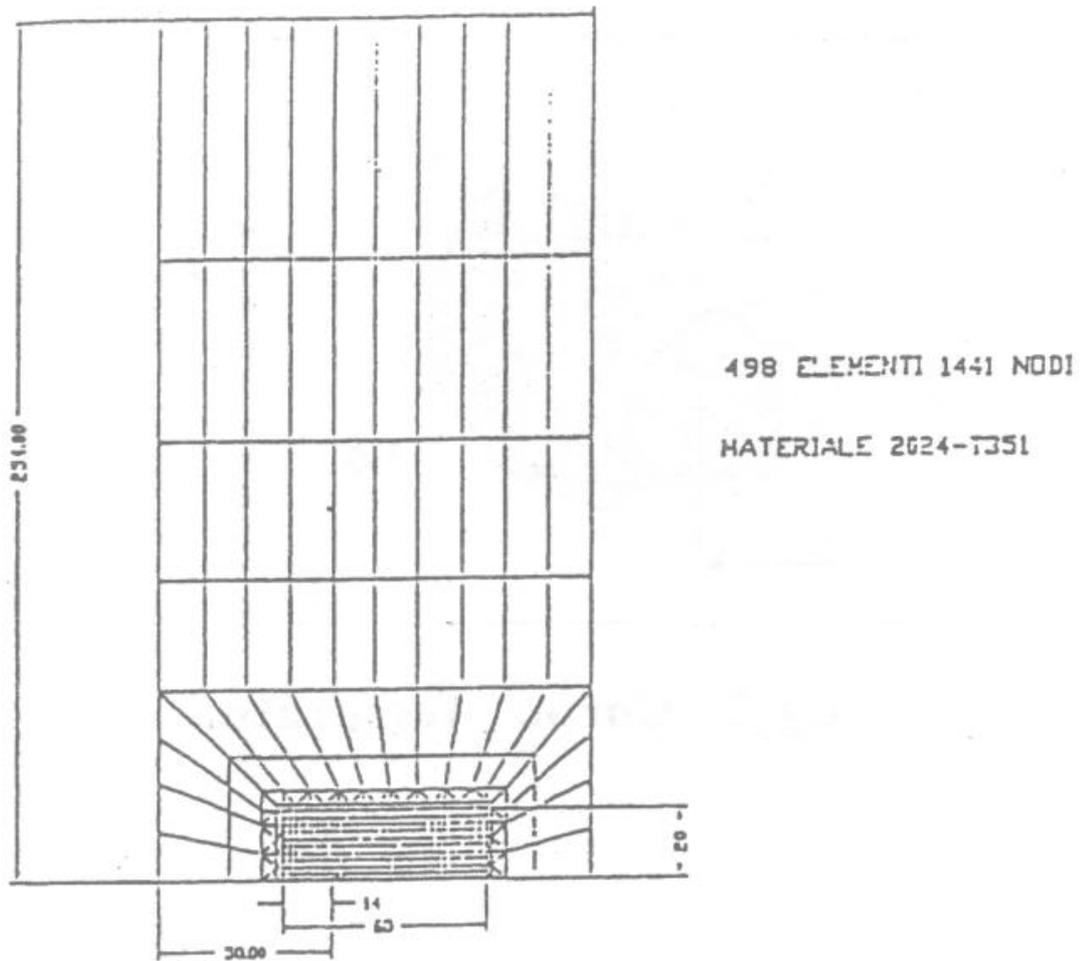


fig. 4 Mesh di calcolo utilizzata.

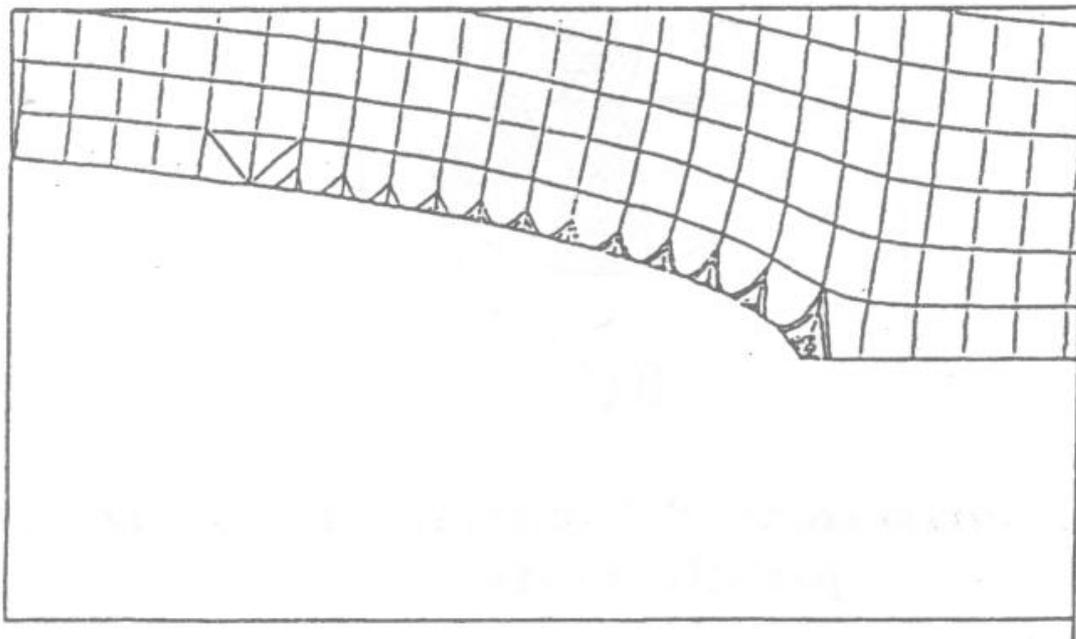


fig. 5 Deformazione Plastica equivalente in seguito a propagazione.

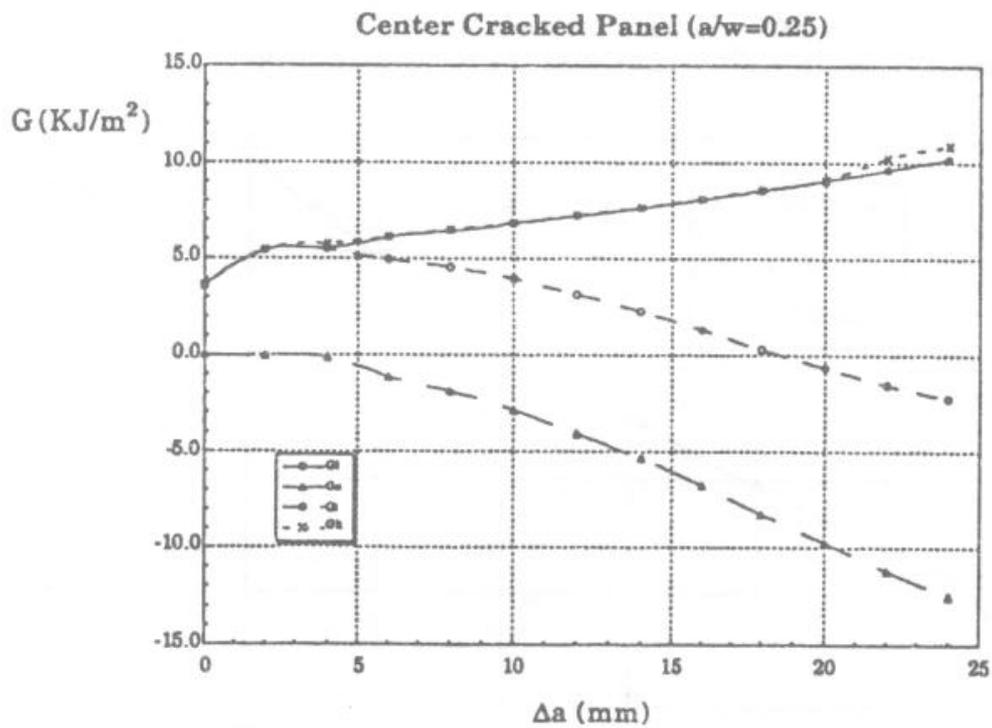


fig. 6 *ERR* in condizioni di perfetta plasticità.

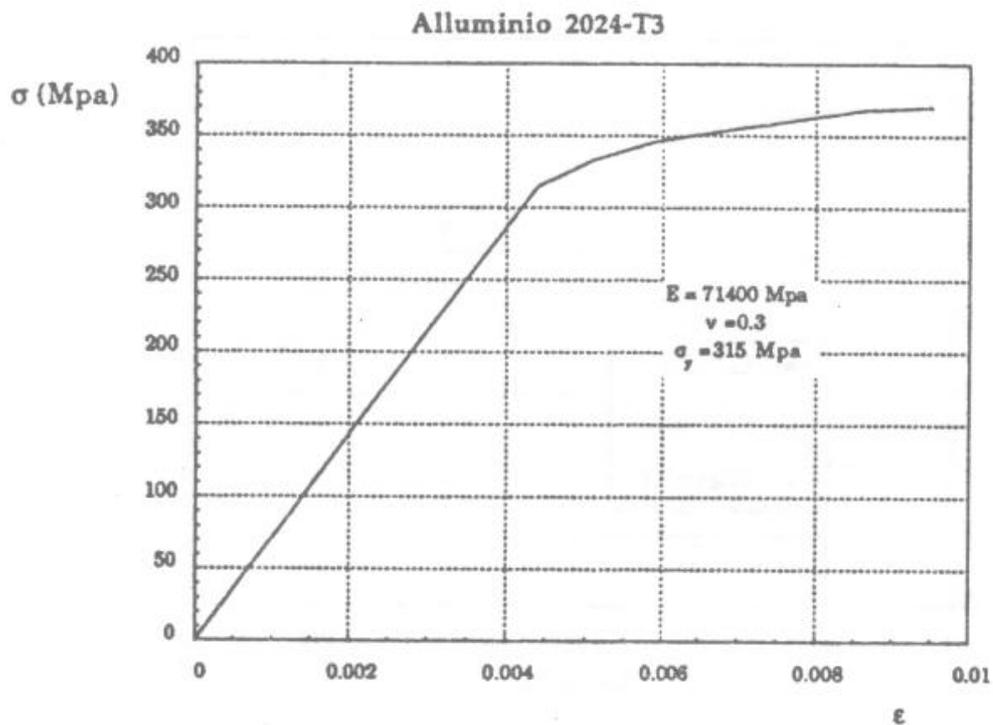


fig. 7 Modello costitutivo del materiale

Confronto integrale di linea  
(no hardening, Kinematic and mix hardening)

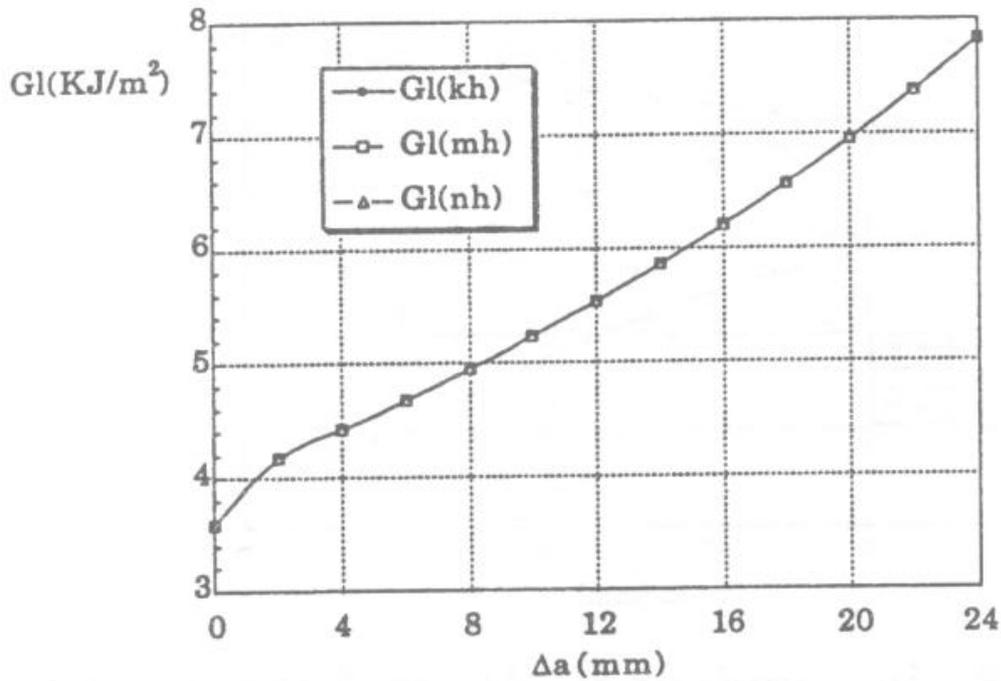


fig. 8.a *ERR* : Contributo dell'integrale di linea

Confronto integrale di area  
(no hardening, kinematic and mix hardening)

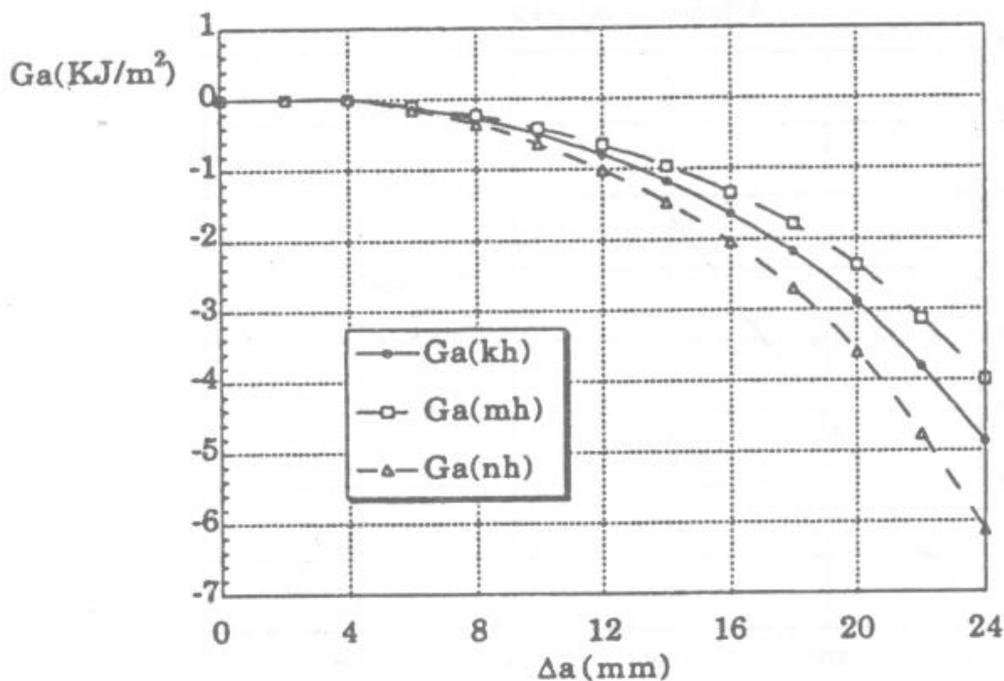


fig. 8.b *ERR* : Contributo dell'integrale di area

Confronto integrale totale  
(no hardening, kinematic and mix hardening)

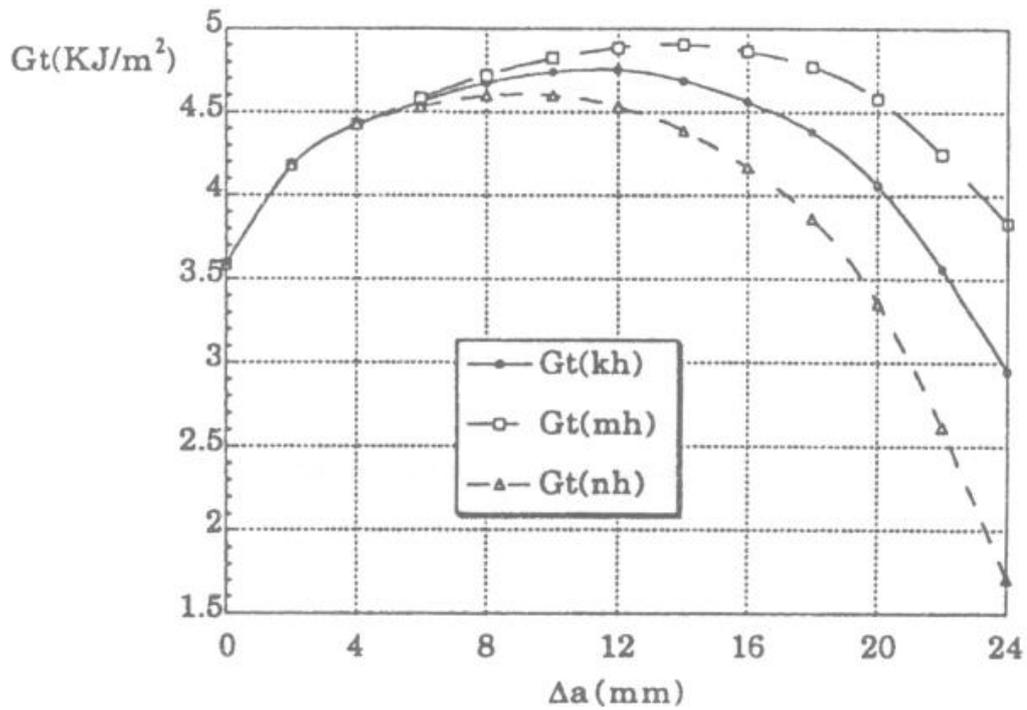


fig. 8.c *ERR* : Modelli di incrudimento