

MULTIFRATTALITA' DELLE SUPERFICI  
DI FRATTURA NEI MATERIALI DISORDINATI:  
EFFETTI DI SCALA SULL'ENERGIA DI FRATTURA

Alberto Carpinteri & Bernardino Chiaia

*Dipartimento di Ingegneria Strutturale, Politecnico di Torino,  
Corso Duca degli Abruzzi 24, 10129 Torino, Italia*

## Sommario

In letteratura si riscontra un notevole numero di lavori sperimentali sulla topologia delle superfici di rottura di elementi in calcestruzzo, materiale ceramico e, in generale, di materiale con microstruttura eterogenea; in molti casi essa ha permesso di rilevare il carattere frattale delle stesse superfici. Nella presente nota si riportano i risultati di un'indagine *post-mortem* condotta sulle superfici di frattura di provini in calcestruzzo, che ha consentito di determinarne la dimensione frattale (non-intera) attraverso digitalizzazione di profili per mezzo di un acquisitore laser e, successivamente, di collegare la dimensione stessa all'*energia di frattura rinormalizzata* del materiale. L'ipotesi di multifrattalità della microstruttura danneggiata del materiale comporta un incremento dimensionale rispetto alla classica ipotesi di bi-dimensionalità delle superfici di rottura, e rappresenta la base della cosiddetta Legge di Scala Multifrattale. Nel diagramma bilogarithmico può evidenziarsi una transizione da un regime di estremo disordine Browniano (pendenza 1/2) a un regime di estremo ordine (pendenza zero): l'energia nominale di frattura  $G_F$  aumenta con le dimensioni della struttura in maniera marcatamente non lineare. In particolare, il regime di *scaling* frattale (disordinato) è valido per le strutture più piccole, mentre il regime omogeneo (ordinato), corrispondente alle dimensioni più grandi, comporta il progressivo svanire dell'effetto di scala, fino al raggiungimento di un valore costante asintotico di  $G_F$ .

## 1 Introduzione

Un'intima relazione può riscontrarsi tra il concetto di frattale (dominio matematico con dimensione non intera) e il fenomeno della frattura dei materiali: il termine stesso "frattale" deriva dal latino "fractum", che significa "rotto" [1]. In Fisica Statistica, nell'ambito dei fenomeni critici (transizioni di fase), l'*universalità* del punto critico implica autosomiglianza del fenomeno su tutto il campo di scale interessate; e l'autosomiglianza, da un punto di vista topologico, comporta che l'osservazione della superficie di frattura a diverse scale risulti in morfologie (statisticamente) simili.

L'evidenza sperimentale dell'autosomiglianza (frattalità) delle superfici di frattura su un vasto campo di scale è frequentemente riscontrabile nella recente letteratura: proprietà frattali sono state rilevate sulle superfici di rottura di provini d'acciaio, di roccia e di calcestruzzo,

quanto meno in un intervallo di osservazione compreso tra una scala limite superiore, legata alla dimensione macroscopica dell'oggetto, ed una scala inferiore, legata alla microstruttura del materiale (ad esempio, la dimensione minima del grano).

Da un punto di vista meccanico, il significato di una dimensione fisica  $D$  della superficie di rottura maggiore di 2 e non intera, potrebbe intendersi come espressione di una dissipazione energetica durante lo sviluppo della frattura che è di natura intermedia tra una pura dissipazione superficiale (qual'è la classica ipotesi della Meccanica della Frattura Elastica Lineare) e una dissipazione volumetrica (corrispondente al classico approccio della Resistenza dei Materiali, della Teoria della Plasticità e del Danneggiamento). La definizione di nuove proprietà meccaniche *universali* (ossia indipendenti dalla scala), dalle dimensioni fisiche non intere ma dipendenti dalla dimensione frattale della microstruttura danneggiata del materiale, rappresenta la cosiddetta procedura di *rinormalizzazione*, ben nota nella Fisica Statistica delle Transizioni di Fase [2].

## 2 Determinazione sperimentale della dimensione frattale

Partendo dalle varie definizioni matematiche disponibili (dimensione di Hausdorff, dimensione di Bouligand-Minkowski, dimensione di ricoprimento ed altre ancora), possono essere sviluppate diverse tecniche per la determinazione della dimensione frattale dei profili di frattura; è bene notare che, sebbene esse siano tutte equivalenti nel continuo e per scala di osservazione tendente a zero, mostrano sostanziali differenze una volta discretizzate ed applicate ai dati digitalizzati. Inoltre, l'assunzione che i profili di frattura siano rappresentati meglio da modelli *auto-affini* piuttosto che da modelli auto-simili causa qualche inconveniente in alcune delle tecniche.

La legge di autosomiglianza, nel caso dei frattali naturali, comporta che morfologie statisticamente simili si ottengano qualora tutte le coordinate siano scalate uniformemente. D'altro canto, catene montuose, regioni topografiche e superfici di frattura rivelano una morfologia statisticamente simile al variare della scala di osservazione solo se le lunghezze sono scalate per mezzo di fattori dipendenti dalla direzione. Mandelbrot [3] ha definito tale legge di *scaling* non-uniforme come *auto-affinità*. Un profilo auto-affine esatto (matematico) può descriversi attraverso una funzione  $z(x)$  dotata della seguente proprietà: se si moltiplica la coordinata  $x$  per il fattore di scala  $s$ , la coordinata  $z$  deve essere moltiplicata per il fattore  $s^H$ :

$$z(sx) = s^H z(x), \quad H > 0, \quad (1)$$

ove  $H$  è detta "co-dimensione". La principale caratteristica dei profili auto-affini è la presenza contemporanea di due differenti dimensioni frattali, la cosiddetta dimensione "locale" e la dimensione "globale", dovute alla presenza di una lunghezza di separazione  $t_c$ , detta *cross-over length*, che è una caratteristica del profilo e separa due diversi regimi di comportamento in base alla *scala di misurazione*  $L$  alla quale il frattale è considerato: per  $L < t_c$  emerge la natura non-Euclidea della superficie di rottura, e la dimensione locale non intera può così determinarsi come  $D_l = 2 - H$  (*regime frattale* o disordinato), mentre, per  $L > t_c$ , un *regime omogeneo*, corrispondente ad un comportamento macroscopicamente Euclideo, è quello che prevale. Può facilmente dimostrarsi [3] che la dimensione globale di un profilo auto-affine vale  $D_g = 1$ : pertanto, se si misura il profilo a scale più grandi di  $t_c$ , si ottiene una dimensione molto prossima a 1. Questa potrebbe essere la spiegazione di alcuni valori anomali della dimensione frattale, risultati sorprendentemente bassi, e spesso riportati in letteratura.

Le superfici di frattura sono state scansionate per mezzo di un profilometro laser secondo profili paralleli nelle due direzioni orizzontali principali, al fine di mediare gli effetti indesiderati

di un probabile avanzamento altamente correlato della fessura lungo una direzione preferenziale. Il profilometro, mosso lentamente passo dopo passo da un meccanismo servo-controllato lungo una guida orizzontale (direzione  $x$ ), leggeva le quote del profilo (coordinata  $z$ ) ad ogni passo, per mezzo di un sistema automatizzato di acquisizione dati controllato dal computer, con una precisione verticale di  $\pm 0.01$  mm. I profili sono stati discretizzati con una precisione orizzontale pari a 0.1 mm, risultando in tal modo digitalizzati circa 1000 punti per un profilo di 10 cm.

Basandosi sulle note definizioni matematiche di "dimensione del compasso" e "dimensione delle celle di ricoprimento" (*box-counting dimension*), sono stati infine sviluppati degli algoritmi numerici al fine di indagare sulle proprietà frattali di circa 70 profili, provenienti da campioni differenti precedentemente rotti in prove di trazione diretta.

### 3 Metodo del compasso

Tale metodo, spesso chiamato anche "metodo del righello o del divisore", deriva da una prima intuizione di Richardson [4] il quale osservò che, misurando la lunghezza della costa di alcune isole naturali per mezzo di "righelli" di lunghezza variabile, non si otteneva per il perimetro un unico valore, ma si poteva determinare una legge di potenza che legava la lunghezza dello strumento di misura al perimetro risultante:

$$\log L(r) \approx (1 - D) \log r, \quad (2)$$

dove  $L(r)$  rappresenta il perimetro totale dell'isola, misurato per mezzo di un righello di misura  $r$ , e  $D$  è la corrispondente dimensione frattale. L'applicazione del metodo ai profili di frattura (Fig. 1-a e 1-b) consiste fondamentalmente nell'adoperare righelli di lunghezza  $r_i$  progressivamente decrescente, e nel percorrere con essi l'intero profilo, misurandone volta per volta la lunghezza totale approssimata  $L_i$  (concetto di *misura alla scala i*). Dal concetto matematico di insieme frattale, vale la seguente definizione limite:

$$D_c = 1 - \lim_{r_i \rightarrow 0} \frac{\log L_i}{\log r_i}, \quad (3)$$

dove  $D_c$  è detta "dimensione del compasso".

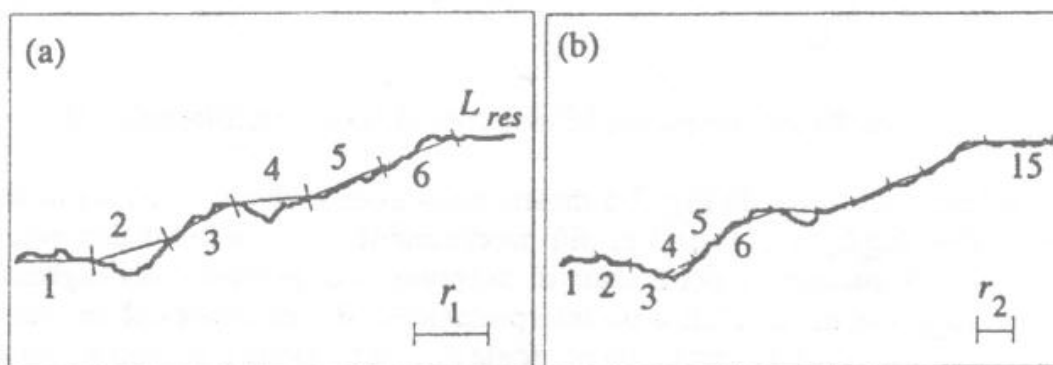


Figura 1. Metodo del compasso.

Da un punto di vista operativo, anziché adoperare con una scomoda relazione di limite, si effettua una regressione lineare nel piano bi-logaritmico ( $\log L_i$  vs.  $\log r_i$ ), in modo da ottenere la pendenza  $\beta$  (Figura 2-a). Dall'equazione (3) segue immediatamente:  $D_c = 1 - \beta$ . Spesso una

lunghezza residua  $L_{res}$  è presente in coda al profilo: essa può essere trascurata se risulta piccola rispetto al righello considerato o, meglio, sommata alla lunghezza totale del profilo o, infine, evitata, se si è adoperata una sequenza ottimale (diadica) di unità di misura.

La dimensione del compasso, esattamente coincidente con la teorica dimensione di Hausdorff nel caso di profili autosomiglianti, non può definirsi univocamente nel caso di profili auto-affini: il righello di lunghezza  $r_i$ , con il quale si percorre l'intero profilo, scala in maniera omogenea nelle due direzioni  $x$  e  $z$ , laddove uno *scaling* non uniforme (dipendente dalla direzione) è richiesto dall'auto-affinità. Può agevolmente dimostrarsi [5] come la "dimensione del compasso" tenda al valore  $D_c = 1/H$  nel limite dell'alto ingrandimento della scala lungo  $z$ , cioè qualora le coordinate verticali siano moltiplicate per 100 o 1000, mentre si ricava una dimensione globale pari a quella topologica ( $D_g = 1$ ) nel caso in cui le fluttuazioni  $z(x)$  del profilo siano smussate, ossia per scale di osservazione molto grossolane. Pertanto, assumendo che un valore limite pari a  $1/H$  sia raggiunto dalla dimensione  $D_c$  quando le altezze del profilo siano state opportunamente esaltate, la dimensione frattale ( $D = 2 - H$ ) di un profilo auto-affine può determinarsi come:  $D = 2 - 1/D_c$ . Il limite locale  $1/H$  della dimensione del compasso, nel caso di profili auto-affini, è a volte detto anche dimensione *latente* del profilo.

Nella Fig. 2 è presentata l'applicazione del metodo a un profilo di calcestruzzo. Quando la lunghezza del righello diviene confrontabile con il passo di digitazione del profilo (0.1 mm), si manifesta un effetto di discretizzazione (rettificabilità del profilo) a causa del quale il carattere frattale non è più rilevabile: pertanto tali letture vengono trascurate. Con riferimento alla Fig. 2-a, il valore  $D_c = 1 - \beta = 1.09$  è fornito dalla regressione lineare: tale valore risulta piuttosto basso, e può arguirsi che ciò è dovuto al carattere auto-affine del profilo. Se infatti la stessa analisi si effettua sul profilo opportunamente trasformato ( $z^* = z \times 100$ ), essa fornisce un valore più accettabile,  $D_c = 1.21$ .

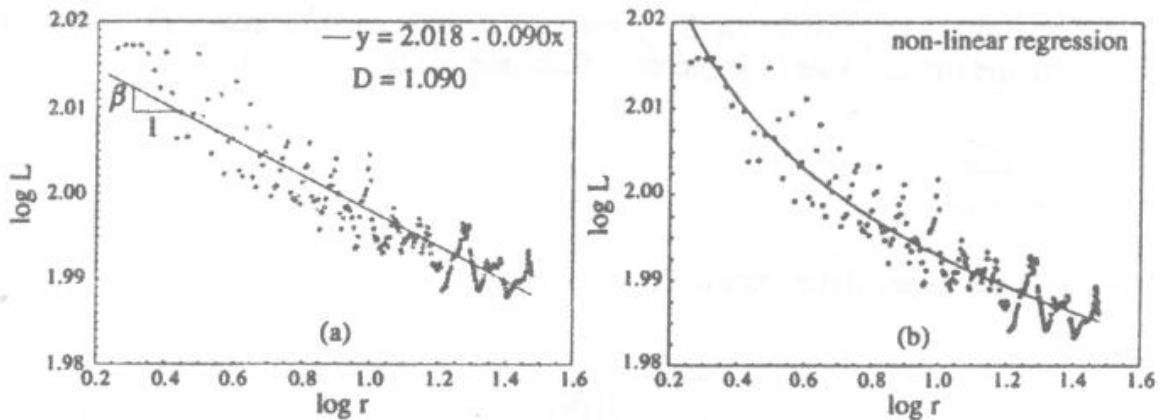


Figura 2 - Metodo del compasso. Monofrattalità (a) vs. multifrattalità (b).

Un'attenta osservazione della Fig. 2-a mostra chiaramente un andamento non lineare nel piano bi-logaritmico ( $\log L_i$  vs.  $\log r_i$ ) e, più precisamente, un continuo decremento della dimensione frattale all'aumentare della scala di osservazione; pertanto una regressione non lineare (Fig. 2-b) rappresenta senz'altro un'interpretazione più realistica del carattere frattale delle superfici di frattura. Il limite asintotico per scale di osservazione crescenti è pari a  $D_c = 1$ , valore corrispondente a un'omogeneità macroscopica e alla dimensione globale della teoria dell'auto-affinità. Per quanto riguarda il comportamento alle piccole scale di osservazione (regime frattale), si è determinato un valore limite pari a  $D_c = 1.39$ ; sarebbe tuttavia necessaria una maggiore risoluzione nella digitalizzazione dei profili, al fine di studiarne il comportamento alle scale più dettagliate.

## 4 Metodo delle celle di ricoprimento

Il metodo deriva dall'originale definizione matematica di *dimensione di ricoprimento*. Detto  $E$  il profilo frattale,  $N(E, \varepsilon)$  è definito come il più piccolo numero di celle di dimensione lineare  $\varepsilon$  e necessarie per ricoprire completamente  $E$ . Se il limite:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(E, \varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)} = D_b, \quad (4)$$

esiste ed è finito, allora  $D_b$  è detta "dimensione delle celle di ricoprimento" (*box-counting dimension*) di  $E$ .

Da un punto di vista operativo, il metodo si applica generando una griglia quadrata (o rettangolare) di dimensione lineare pari a  $\varepsilon_i$  e determinando il numero minimo  $N_i(E, \varepsilon_i)$  di celle necessarie a ricoprire l'intero profilo (Figg. 3-a e 3-b). La procedura viene quindi ripetuta con dimensioni della maglia progressivamente più piccole: al solito, anziché applicare direttamente la definizione di limite (equazione (4)), si effettua una regressione lineare nel piano bi-logaritmico ( $\log N_i$  vs.  $\log \varepsilon_i$ ) e la dimensione frattale può ricavarsi agevolmente dalla pendenza della retta di *best-fit*. È opportuno calcolare il numero di quadrati  $N_i$  mediando tra i valori ottenuti relativamente a differenti origini della griglia, in modo da estrarre un valore più obiettivo.

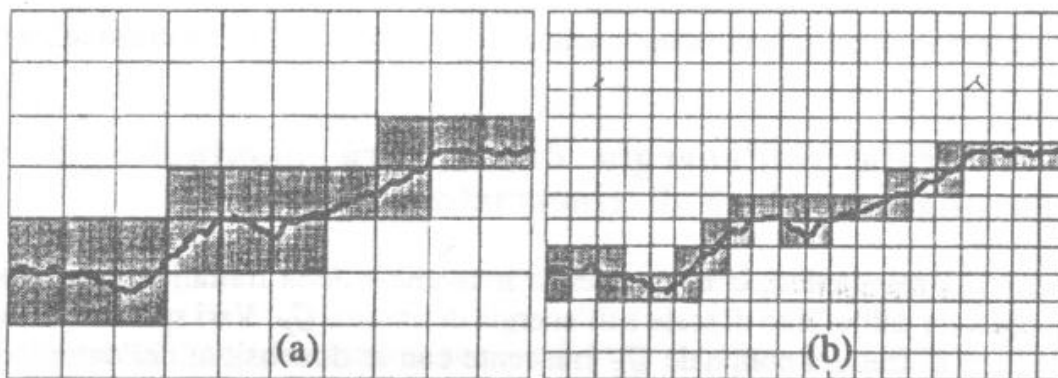


Figura 3. Metodo delle celle di ricoprimento.

L'applicazione del metodo ad un profilo di frattura è mostrato in Fig. 4, ove i principali effetti di discretizzazione dovuti all'acquisizione passo-passo sono stati preventivamente depurati. Il metodo fornisce il valore 1.16 per mezzo della regressione lineare (Fig. 4-a), laddove, per lo stesso profilo, il metodo del compasso aveva fornito il valore 1.09. La regressione non-lineare è mostrata in Fig. 4-b, risultando in una più coerente interpretazione della topologia multifrattale della superficie:  $D_b$ , infatti, diminuisce progressivamente all'aumentare della dimensione delle celle. Dal momento che tutti i profili esaminati hanno mostrato, più o meno, lo stesso comportamento al variare della scala, indipendentemente dall'algoritmo adoperato per l'analisi, la multifrattalità geometrica può assumersi come una proprietà universale delle superfici considerate.

Rispetto al metodo del compasso, si può notare una maggiore stabilità del metodo in oggetto: i dati, nel piano bi-logaritmico, risultano meno dispersi attorno al trend medio. Purtroppo, una misura "alla Bouligand", cioè di ricoprimento con griglie quadrate, non risulta matematicamente coerente nel caso di profili auto-affini: infatti, le proprietà scalari di siffatti profili, non uniformi nelle varie direzioni, non corrispondono alle proprietà delle griglie, che risultano autosomiglianti in seguito alla progressiva ed omotetica diminuzione della dimensione lineare delle celle. Al fine di eliminare questa incongruenza, la griglia di ricoprimento dovrebbe

essere scalata in maniera auto-affine (cioè, detto  $b$  il fattore di scala nella direzione  $x$ ,  $b^H$  dev'esserlo nella direzione  $z$ ) e si dovrebbe utilizzare una procedura iterativa, dal momento che l'esponente  $H$  non è noto.

Al fine di esaltare le fluttuazioni verticali del profilo, possono impiegarsi ricoprimenti a celle rettangolari con il lato verticale molto più piccolo di quello orizzontale, in modo che possa estrarsi la dimensione frattale locale ( $D = 2 - H$ ); ad ogni modo, tale valore è raggiunto solo nel limite di alta risoluzione del processo di ricoprimento mentre, man mano che si aumenta la dimensione lineare della maglia, si tenderà sempre al valore globale  $D_g = 1$ .

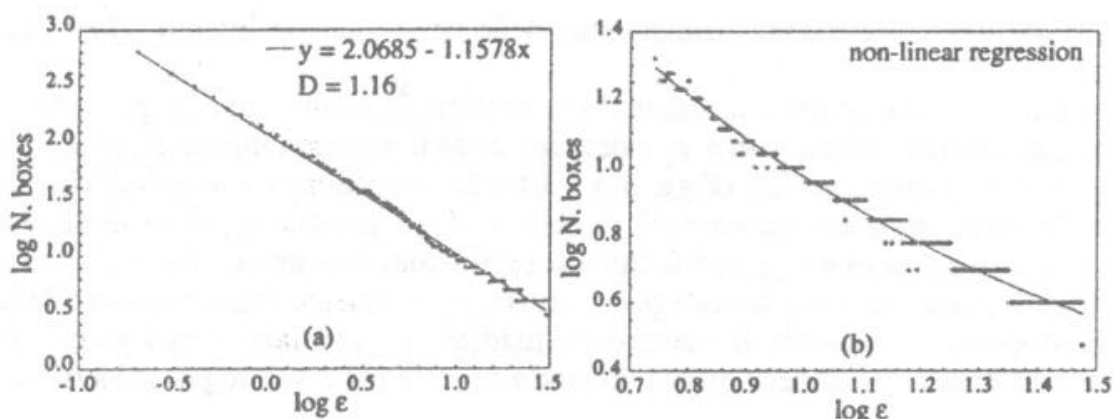


Figura 4 - Metodo delle celle di ricoprimento. Monofrattalità (a) vs. multifrattalità (b).

## 5 Effetto di scala sull'energia di frattura nominale: deduzione basata su una procedura di rinormalizzazione

Da un punto di vista meccanico, la conseguenza immediata della frattalità delle superfici di frattura è rappresentata dall'effetto di scala sull'energia di frattura  $\mathcal{G}_F$ . Vari sperimentatori hanno misurato un'energia di frattura nominale  $\mathcal{G}_F$  crescente con le dimensioni del campione  $e$ , e, più specificamente, con la dimensione della sezione netta resistente, laddove invece, nei classici approcci della Meccanica della Frattura,  $\mathcal{G}_F$  è considerata una proprietà universale del materiale.

L'ipotesi di superficie di dissipazione monofrattale implica proprietà geometriche di autosomiglianza per la superficie stessa; l'invarianza di scala, d'altra parte, costituisce l'ipotesi di base della Teoria del Gruppo di Rinormalizzazione, che è stata applicata con successo nell'analisi delle transizioni di fase, ove ha consentito il calcolo degli esponenti critici, a loro volta risultati numeri non interi ed universali.

Partendo dall'ipotesi di invarianza di scala al punto critico e supponendo una superficie di dissipazione frattale con dimensione frattale univoca e pari a  $D = 2 + d_G$ , una procedura per spiegare l'aumento dell'energia di frattura con la dimensione strutturale è rappresentata dal gruppo di rinormalizzazione costituito dalla sequenza in cascata delle scale di osservazione del fenomeno [6, 8]. Dal momento che l'energia totale  $W$  dissipata durante la frattura è invariante rispetto alla scala di osservazione, può scriversi:

$$W = \mathcal{G}_1 A_1 = \mathcal{G}_2 A_2 = \dots = \mathcal{G}_{n-1} A_{n-1} = \mathcal{G}_n A_n = \mathcal{G}_{n+1} A_{n+1} = \dots = \mathcal{G}_\infty A_\infty, \quad (5)$$

ove la prima scala di osservazione è quella macroscopica, con  $\mathcal{G}_1 A_1 = \mathcal{G}_F A$ , essendo  $A$  l'area nominale della sezione trasversale, e la scala di osservazione asintotica è quella microscopica, con  $\mathcal{G}_\infty A_\infty = \mathcal{G}_F^* A^*$ , essendo  $A^*$  la misura dell'insieme frattale rappresentante la superficie irregolare di frattura e  $\mathcal{G}_F^*$  l'energia di frattura rinormalizzata, con dimensioni fisiche

maniera, *omogeneizzata*, cioè si comporta macroscopicamente come una struttura ordinata (regime omogeneo).

In accordo quindi con la Legge di Scala Multifrattale (Figg. 6-a e 6-b), l'effetto scala svanisce nel limite di dimensione strutturale  $b$  che tende ad infinito, e si può determinare un valore asintotico e costante per  $\mathcal{G}_F$ . Viceversa, in presenza di strutture più piccole, l'effetto della microstruttura disordinata diventa progressivamente più importante e  $\mathcal{G}_F$  decresce al diminuire delle dimensioni, tendendo idealmente a zero. Nel piano bi-logaritmico la pendenza della curva rappresenta localmente l'incremento dimensionale frattale  $d_G$ , che può pertanto assumersi come misura dell'influenza variabile del disordine sul comportamento meccanico. Dal diagramma si deducono due condizioni limite che devono essere soddisfatte:  $d_G \rightarrow 0$  per grandi strutture (ossia, effetti microstrutturali omogeneizzati), e  $d_G \rightarrow 0.5$  per le strutture più piccole. Quest'ultima situazione corrisponde al massimo disordine possibile, il disordine "Browniano", che rappresenta un limite teorico, come si vedrà nel paragrafo seguente.

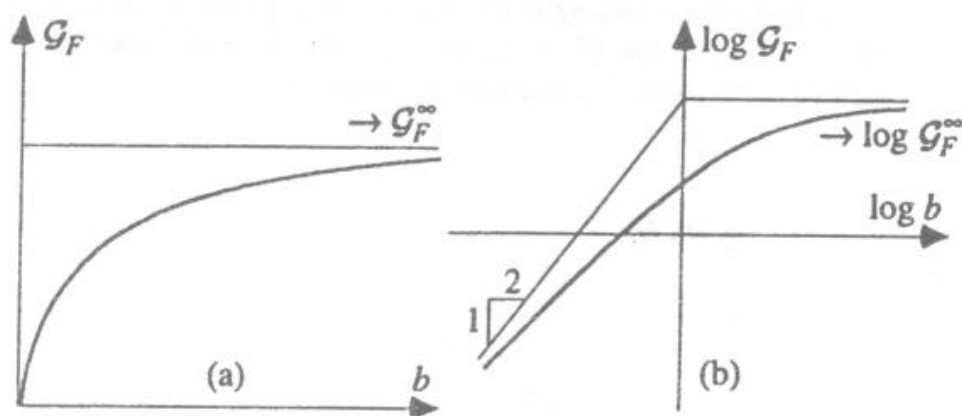


Figura 6: Legge di Scala Multifrattale per l'energia di frattura.

## 7 Superfici Browniane, o il massimo disordine possibile

Il moto Browniano è storicamente importante dal momento che esso è stato il primo esempio di un fenomeno fisico caratterizzato dalla non-derivabilità. Inoltre, da un punto di vista sperimentale, esso ha fornito le basi per analizzare i processi diffusivi, considerati come archetipi dei processi dissipativi in fisica.

Come estensione agli spazi tridimensionali, una superficie frattale auto-affine è definita tramite la seguente relazione:

$$z(sx, sy) = s^H z(x, y), \quad (8)$$

ove la dimensione frattale locale è semplicemente data da  $D = 3 - H$  e la dimensione globale corrisponde a quella topologica, cioè  $D_g = 2$ . Il caso particolare di  $H = 1/2$  corrisponde ad una *superficie Browniana*, la cui dimensione frattale, nel limite dell'alta risoluzione, vale 2.5.

Si può affermare che tale incremento frattale ( $d_G = 0.5$ ) rappresenta il *massimo grado di disordine* riscontrabile in un processo di frattura, e che pertanto coincide con la massima pendenza della Legge di Scala Multifrattale, idealmente raggiunta per dimensioni strutturali tendenti a zero. In una superficie Browniana la posizione verticale  $z(x, y)$  di ciascun punto dipende dalla quota di tutti gli altri punti, e soprattutto da quella dei punti più vicini. D'altro canto, da un punto di vista matematico, una superficie Browniana è l'integrale di un rumore bianco Gaussiano in due dimensioni, ed è quindi originata da un sequenza di passi totalmente

indipendenti nello spazio degli incrementi, come si addice ad un *processo casuale totalmente non correlato*.

Nel caso invece delle superfici Browniane Frazionarie (si dicono moti Browniani Frazionari i processi casuali descrivibili dall'equazione (8), e per i quali  $H \neq 1/2$ ), sono presenti correlazioni a lungo raggio tra gli incrementi ed, in particolare, gli incrementi in un dato intervallo sono legati a quelli in un intervallo futuro risultandone, se  $H > 1/2$ , una *persistenza* nel comportamento medio della funzione  $z(x, y)$ . Di conseguenza, in confronto alle classiche superfici Browniane puramente casuali, le superfici Browniane Frazionarie con  $D < 2.5$  mostrano una natura fortemente autocorrelata [5], per cui, in un certo senso, posseggono un grado ridotto di disordine. Il caso di  $H < 1/2$  (cioè  $D > 2.5$ ), è anch'esso caratterizzato da un comportamento autocorrelato (*antipersistenza*) e quindi da un minor grado di casualità rispetto alle superfici Browniane ordinarie. D'altra parte, da un punto di vista geometrico, dimensioni frattali maggiori di 2.5 comporterebbero la presenza di sporgenze rientranti lungo la superficie, le quali sarebbero chiaramente incompatibili con la cinematica del processo di frattura.

Il limite dimensionale  $d_G \leq 0.5$  è già stato segnalato da Carpinteri [8] per mezzo di un procedimento di Analisi Dimensionale, collegando l'incremento frattale  $d_G$  della superficie di frattura al decremento  $d_G$  della dimensione fisica della sezione resistente in corrispondenza del carico critico. Quest'ultimo valore, a sua volta, è il parametro responsabile dell'effetto di scala sulla resistenza nominale a trazione [9], ed è quantitativamente limitato allo stesso modo:  $d_G \leq 0.5$ .

## Bibliografia

- [1] Mandelbrot, B.B., *The Fractal Geometry of Nature*, W.H. Freeman and Company, New York, 1982.
- [2] Wilson, K.G., "Renormalization group and critical phenomena", *Physical Review*, 1971, B4, pp. 3174-3205.
- [3] Mandelbrot, B.B., "Self-affine fractals and fractal dimension", *Physica Scripta*, 1985, 32, pp. 257-260.
- [4] Richardson, L.F., "The problem of contiguity: an appendix of statistics of deadly quarrels", *General System Yearbook*, 1961, 6, pp. 139-187.
- [5] Feder, J., *Fractals*, Plenum Press, New York, 1988.
- [6] Carpinteri, A. & Chiaia, B., "Fractals, Renormalization group theory and scaling laws for strength and toughness of disordered materials", *Proceedings of the PROBAMAT Workshop*, Cachan, France, 1993.
- [7] Barenblatt, G.I., *Similarity, Self-Similarity and Intermediate Asymptotics*, Consultant Bureau, New York, 1979.
- [8] Carpinteri, A., "Scaling laws and renormalization groups for strength and toughness of disordered materials", *International Journal of Solids and Structures*, 1994, 31, pp. 291-302.
- [9] Carpinteri, A., Chiaia, B. & Ferro, G., "Multifractal nature of material microstructure and size effects on nominal tensile strength", *IUTAM Symposium on Fracture of Brittle Disordered Materials: Concrete, Rock & Ceramics*, Brisbane, Australia, 1993.