

ISTITUTO SPERIMENTALE DEI METALLI LEGGERI

Soc. ALLUMINIO ITALIA

SpA

LE DISLOCAZIONI NELLA TEORIA DELLA FRATTURA:  
DA VOLTERRA ALLA TEORIA DELLE DISLOCAZIONI  
SUPERFICIALI

F. Gatto, L. Ottolini

Novara 4 Maggio 1983

LE DISLOCAZIONI NELLA TEORIA DELLA FRATTURA:  
DA VOLTERRA ALLA TEORIA DELLE DISLOCAZIONI  
SUPERFICIALI

F. Gatto - L. Ottolini

Le dislocazioni nel "continuo"

La deformazione plastica di un materiale cristallino ha luogo per scorrimento lungo piani cristallografici; tale scorrimento é generalmente soltanto parziale e perciò divide il piano di scorrimento in due parti: una parte traslata ed una parte non traslata. Il confine tra queste regioni é chiamato "linea di dislocazione" ed il vettore di scorrimento ad essa associato é chiamato "vettore di Burgers" (vedi fig. 1).

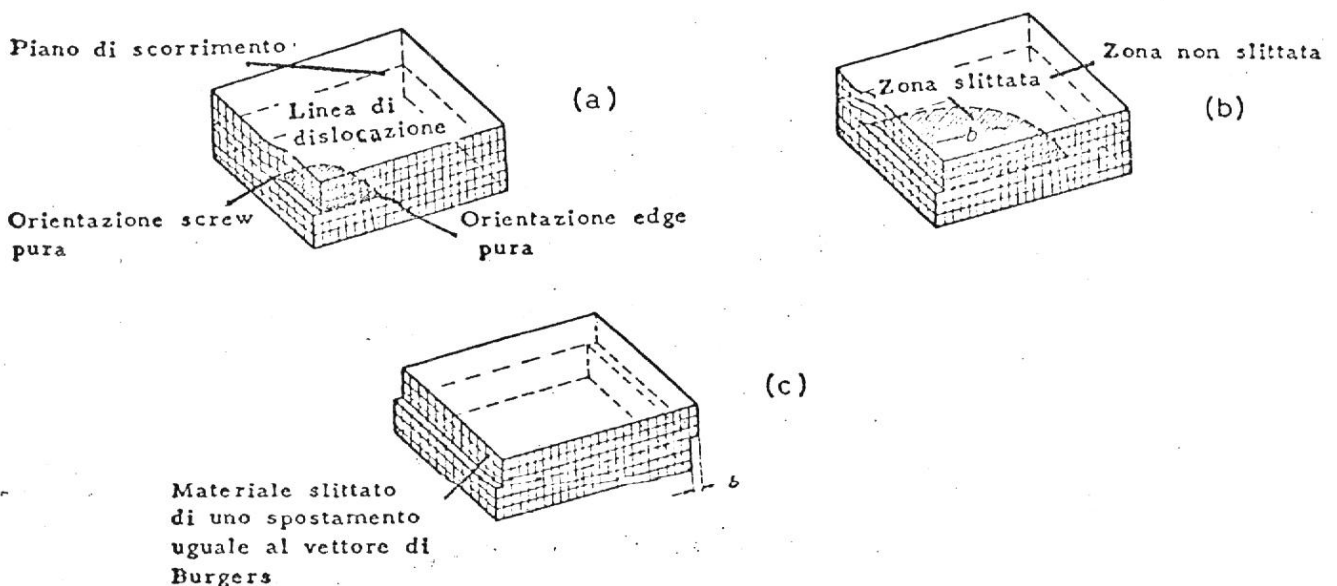


Fig.1 - Processo di scorrimento mediante l'espansione di un loop di dislocazione nel piano di scorrimento.

Definendo la dislocazione come un confine di linea tra la regione traslata e quella non traslata del cristallo (vd. anche fig. 2), é possibile generalizzare il concetto di dislocazione.

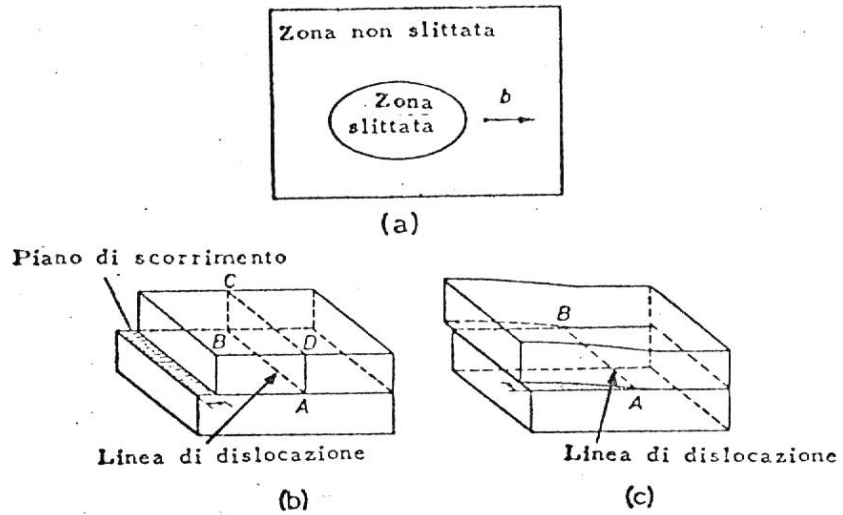


Fig. 2 - Rappresentazione schematica di (a) loop di dislocazione, (b) dislocazione edge, e' (c) dislocazione screw.

Facendo un taglio lungo una superficie arbitraria  $S$ , di contorno  $C$ , appartenente ad un continuo e traslando i lati di essa, l'uno relativamente all'altro, di un vettore costante  $\vec{b}$ , si ottiene una linea di dislocazione lungo la curva  $C$  (vd. fig. 3).

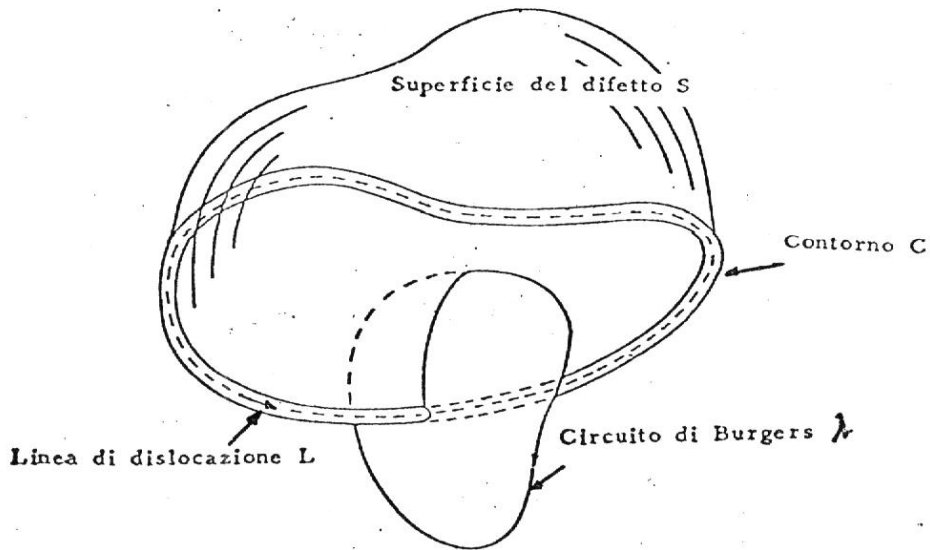


Fig. 3 - Geometria della linea di dislocazione discreta  $L$ ; la superficie del difetto  $S$ , il circuito di Burgers  $\lambda$ .

### Risultati di Weingarten

Da un punto di vista storico l'origine di questi concetti si collega ad un teorema dovuto a Weingarten<sup>(1)</sup> il quale indicò, per la prima volta, la possibilità di esistenza di campi di deformazioni elastiche, e quindi di campi di sollecitazione, in assenza di forze esterne, in corpi elastici continui nei quali si fosse immesso o rimosso del materiale.

I risultati di Weingarten furono poi sviluppati da Volterra<sup>(2)(3)</sup>, che descrisse il tipo di deformazioni a cui la teoria è applicabile, col nome di "distorsioni".

### Risultati di Volterra

Precisamente, nell'ambito della sua trattazione, Volterra si è limitato ad una regione doppiamente connessa, costituita da un cilindro cavo, con risultati però del tutto generalizzabili a corpi multipiamente connessi<sup>(4)</sup>.

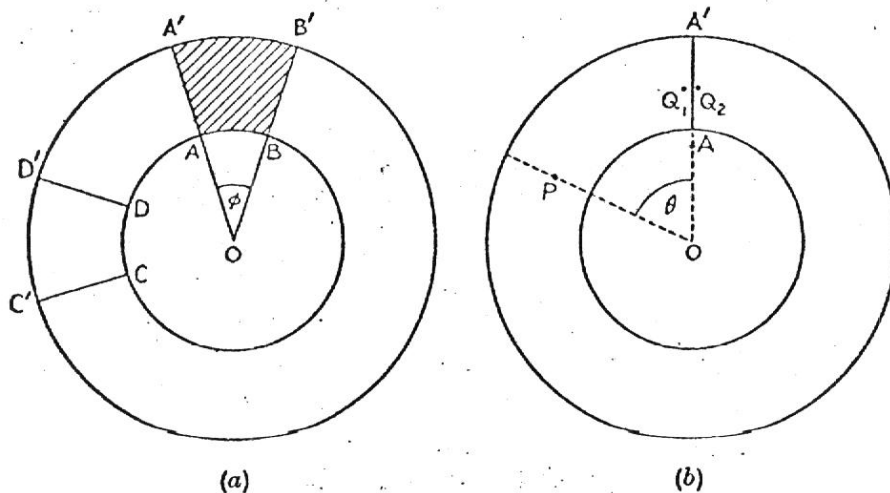


Fig. 4 - (a) Distorsione di un anello cavo. L'anello è tagliato lungo le linee radiali AA' e BB', la porzione AA' B' B è rimossa, e AA' è unito a BB'. La stessa distorsione si sarebbe potuta ottenere tagliando lungo CC' e DD'.  
(b) L'anello distorto. I punti vicini Q<sub>1</sub> e Q<sub>2</sub> giacciono su lati opposti del taglio.

La distorsione di Volterra consiste nell'effettuare un taglio (che deve comunque mantenere la continuità del corpo), nell'imprimere alle facce del taglio uno spostamento relativo, che Volterra assume rigido, nel ristabilire la connessione del taglio mediante saldatura (ideale), dopo aver ristabilito la congruenza degli spostamenti con rimozione o introduzione di materia (vd. es. di fig. 4).

In fig. 5 sono riportati i sei semplici tipi di distorsioni corrispondenti alle diverse modalità dello spostamento applicato.

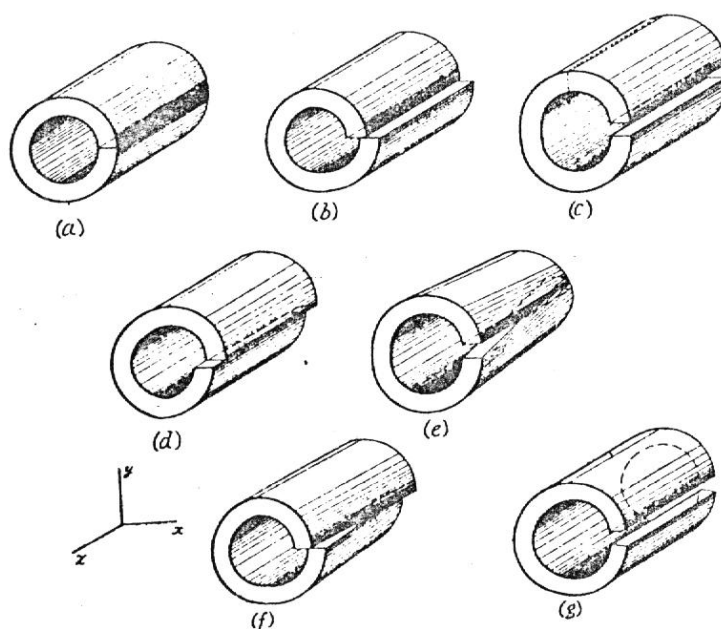


Fig. 5 - I sei semplici tipi di distorsioni di Volterra:  
a) cilindro originale tagliato  
b) dislocazione edge  
c) dislocazione edge  
d) dislocazione screw  
e) disclinazione twist  
f) disclinazione twist  
g) disclinazione wedge

Mentre il termine "distorsione" è stato impiegato per descrivere le operazioni condotte sul corpo ed il conseguente stato di deformazione elastica che porta alla formazione di uno stato di sforzo interno nel materiale, in assenza di sollecitazioni esterne, il termine "dislocazione" è stato generalmente utilizzato per caratterizzare un difetto di tipo lineare che, in conseguenza della distorsione applicata al corpo, si creerebbe lungo l'asse di un cilindro simile al

precedente, ma completamente pieno di materia.

Storicamente la distinzione tra i due termini non è stata così drastica come a prima vista potrebbe apparire, a causa soprattutto dell'ambito elastico in cui tali termini sono nati; anzi, per parecchio tempo, ne è risultata una certa confusione.

Dal punto di vista geometrico la distorsione introduce una grossa novità per quanto riguarda la rappresentazione degli spostamenti dei singoli punti, poiché essi sono ora rappresentati da funzioni continue a più valori.

Comunque se da un lato ciò crea dei problemi, dall'altro non impedisce la definizione univoca delle deformazioni e delle sollecitazioni elastiche collegate alla distorsione, in tutti i punti del cilindro, tranne che lungo la linea della dislocazione.

Si è ottenuto infatti che lungo l'asse  $OO'$  del cilindro pieno di materia (vd. fig. 6), distorto secondo le modalità precedenti, si crea una singolarità nel campo delle deformazioni e delle sollecitazioni elastiche, nel senso che queste grandezze, sulla linea di dislocazione, divergono.

Per evitare ciò, come si è visto, Volterra è ricorso all'espediente di eliminare un tubo di materiale lungo il contorno interno del taglio.

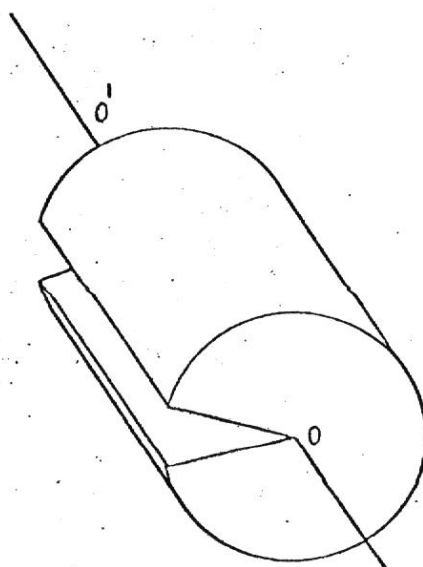


Fig. 6 - Taglio di Volterra in un cilindro completamente pieno di materia.

## Risultati di Somigliana

G. Somigliana ha generalizzato la distorsione di Volterra, eliminando la condizione che le facce del taglio rimanessero rigide durante la distorsione.

Sia  $S$  una superficie (aperta o chiusa) (vd. fig. 7) in un solido elastico lineare e sia  $n_i$  la sua normale unitaria (assunta esterna se  $S$  è chiusa).

Si effettui un taglio su  $S$ , si sposti il lato positivo del taglio, a cui  $\vec{n}$  punta, rispetto al negativo, di un piccolo vettore  $\vec{d}$  non costante (rimovendo materiale per evitare l'interpenetrazione o riempiendo eventuali buchi, qualora sia necessario) e si risaldi.

Si è costruito in tal modo un difetto su  $S$ , originariamente denominato "distorsione di Somigliana", in seguito denominato "dislocazione di Somigliana", specificato dal vettore  $\vec{d}$ , variabile da punto a punto di  $S$ .

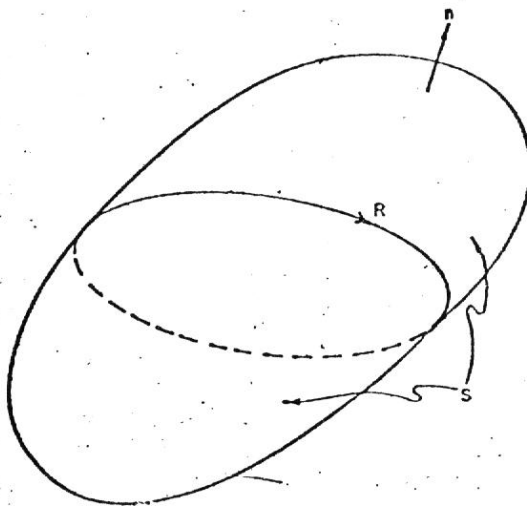


Fig. 7 - Una dislocazione di Somigliana.

Somigliana ha trattato tali difetti in corpi anche semplicemente connessi, impiegando tagli di forma qualunque su superfici aperte o chiuse<sup>(5)(6)(7)</sup>.

Ciò ha dato origine ad un notevole allargamento del campo di

applicazione di tali distorsioni, specialmente nel caso tridimensionale.

Con il difetto di Somigliana nascono problemi del tutto nuovi come ad esempio la irriducibilità della dislocazione ai due vettori usuali della teoria di Burgers: versore tangente alla linea e relativo vettore di Burgers.

Per meglio rendersi conto di ciò basti immaginare una linea di dislocazione spaziale (non planare).

Se si prende come riferimento il piano osculatore, in un punto qualsiasi della linea, la terna sarà costituita dalla tangente locale alla curva,  $\vec{t}$ , dalla normale giacente sul piano osculatore,  $\vec{n}$ , e dalla binormale,  $\vec{b}$ , ortogonale al piano osculatore). Tale caso rappresenta il bordo di una superficie di Somigliana aperta.

Si hanno allora 3 componenti (locali): una screw ed una edge con i vettori di Burgers giacenti sul piano osculatore, ed una pseudo-edge, con il vettore di Burgers ortogonale al piano osculatore, che è l'unico piano possibile per lo scorrimento (vd. fig. 8).

Un discorso analogo può essere fatto per le superfici chiuse, che possono essere topologicamente ricondotte a superfici aperte mediante soppressione di un punto.

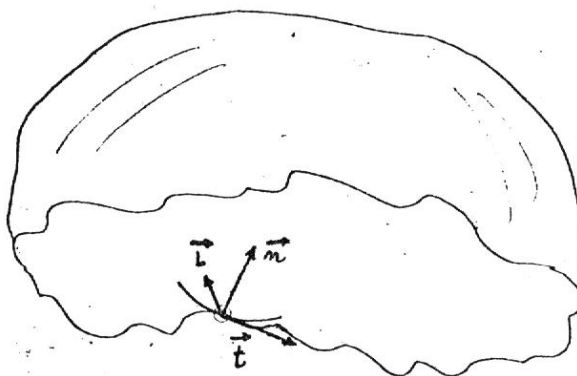


Fig. 8 - Il bordo di una superficie di Somigliana aperta è una linea di dislocazione spaziale (non planare). Se si prende come riferimento il piano osculatore nel punto in esame sulla linea, la terna di assi sarà costituita dalla tangente locale alla curva, dalla normale giacente sul piano osculatore e dalla binormale (ortogonale al piano osculatore).



Non é questa la sede per scendere in maggior dettaglio in questi problemi anche perché, per diverse ragioni, essi non sono stati ancora sufficientemente approfonditi.

E' invece interessante notare che una dislocazione superficiale é ottenibile mediante "sovrapposizione" di anelli piani di dislocazioni pseudo-edge (vd. fig. 9).

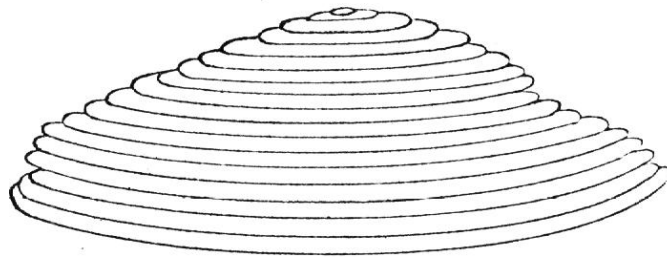


Fig. 9 - La dislocazione superficiale é rappresentabile mediante "sovrapposizione" di anelli piani di dislocazioni pseudo edge.

Tali dislocazioni giacciono tutte sulla superficie di Somigliana, allo stesso modo delle linee di livello su una superficie.

Ne consegue che una dislocazione superficiale é assimilabile ad un sistema di dislocazioni lineari, e viceversa.

Si é ottenuto matematicamente che lo strumento piú idoneo a rappresentare il "contenuto" di dislocazione su una superficie di Somigliana, é risultato non un vettore (vettore di Burgers), bensì un tensore, cioè una grandezza piú complessa, di cui parleremo in seguito.

#### Dislocazioni di Somigliana e difetti superficiali reali

La rappresentazione di una dislocazione di Somigliana mediante

un sistema di anelli di dislocazioni lineari risulta più o meno complicata in relazione agli spostamenti ed alle configurazioni delle facce del taglio.

Comunque il modello di Somigliana è molto più reale di quanto potrebbe sembrare a prima vista. Esso ha già trovato numerose e suggestive utilizzazioni nell'ambito della strutturistica fisica (tilt boundaries, twist boundaries, kink bands, interfacce di fase, trasformazioni martensitiche, ecc.), ove le superfici di Somigliana sono superfici piane e quindi facilmente trattabili (vd. fig. 10, 11 e 12).

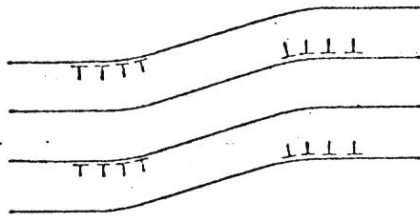


Fig. 10- Modello di dislocazione di una kinkband (osservata nel piano di scorrimento perpendicolare alla direzione di scorrimento).

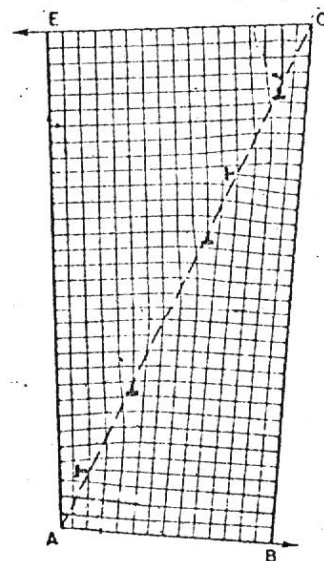


Fig. 11- Tilt boundary rappresentato da una fila di dislocazioni di tipo edge.

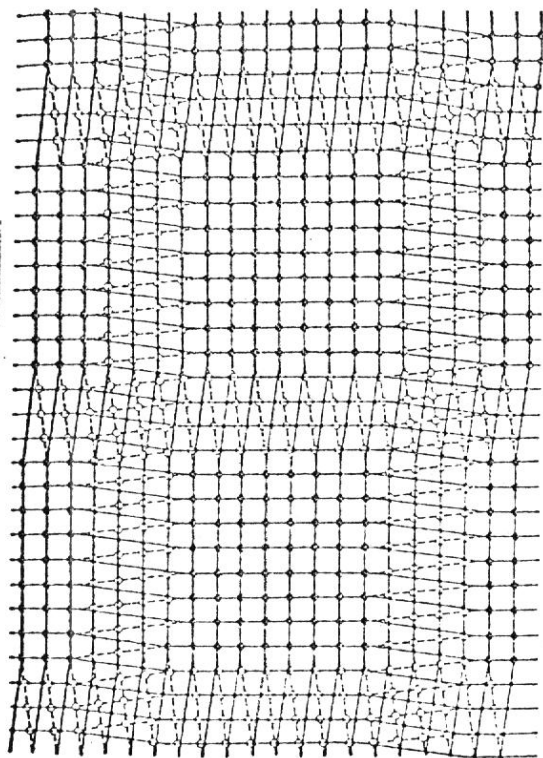


Fig. 12. Twist boundary rappresentato da due sistemi incrociati di dislocazioni screw parallele.

### Dislocazioni superficiali e frattura

L'estensione alla frattura delle dislocazioni superficiali pone qualche nuovo problema poiché sulle facce del taglio alcune componenti degli sforzi vanno a zero e poiché tali facce assumono il carattere di superfici esterne al corpo, e come tali andrebbero trattate.

In queste condizioni le facce della crepa possono mutare forma e posizione per due diversi effetti:

- a) per deformazione dovuta a forze applicate sul corpo
- b) per eliminazione di materiale non accompagnata da variazione dello stato di sollecitazione (corrosione, "evaporazione" di vacanze, ecc.).

Nel primo caso il modello della dislocazione superficiale trova una sua giusta collocazione, mentre nel secondo caso è bene evitare di ricorrere ad esso.

Nei casi intermedi, ove cioè alla eliminazione di materiale si accompagna una variazione dello stato di sollecitazione, occorre effettuare un'analisi per separare i due effetti.

In quest'ordine di idee le dislocazioni di Somigliana vengono utilizzate per interpretare la formazione di una crepa, nel seguente modo, astratto, ma di facile intuizione:

- 1) Si immagina un taglio di spessore nullo
- 2) Si spostano le superfici di tale taglio mediante introduzione di placchette di posizioni reticolari aggiuntive, prive di atomi.

Le placchette, qui impiegate, si possono considerare una generalizzazione dell'idea di porzione di semipiano di atomi introdotta in un taglio, in un materiale cristallino, per rappresentare modellisticamente una dislocazione lineare retta. Tali placchette danno luogo invece a dislocazioni a forma di anello, eventualmente chiuso sulla superficie esterna della cricca. Esse sono costituite da "vuoti", cioè da posizioni atomiche prive di atomi, e non accompagnate dalla distorsione locale tipica delle vacanze e degli aggregati di vacanze; esse pertanto rendono conto dello spazio vuoto all'interno della crepa stessa e quindi anche della configurazione delle facce ( vd. fig. 13).

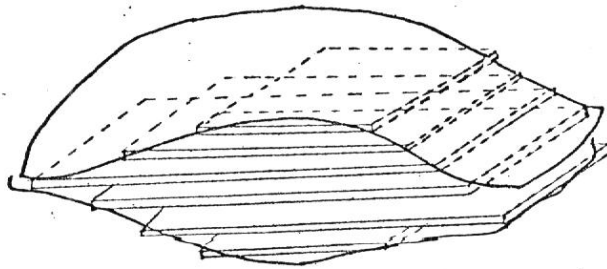


Fig.13- Rappresentazione di una cricca mediante "dislocazioni di crepa" a forma di anello.

Tali dislocazioni vengono dette "dislocazioni di crepa" per distinguerle dalle vere dislocazioni.

Se si assume per semplicità il caso di una frattura piana la dislocazione diventa rettilinea, perpendicolare al piano della figura e la placchetta diviene un semipiano (vd. fig. 14).

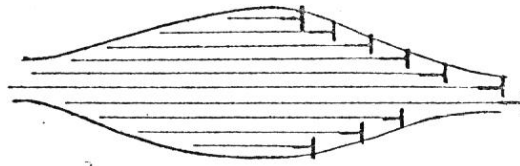


Fig. 14 - Rappresentazione di una frattura piana mediante "dislocazioni di crepa" introdotte da un insieme di semipiani.

La variazione di forma di una crepa può essere rappresentata allora come dovuta alla formazione di nuove dislocazioni ed al movimento di quelle già esistenti, mediante climb, che in questo caso non è accompagnato da diffusione di materiale, ma da diffusione di vuoti (non assimilabili a vacanze).

#### Distribuzioni continue di dislocazioni

Per trattare distribuzioni estese di dislocazioni lineari, come avviene in collegamento con le dislocazioni superficiali, è conveniente trattare matematicamente tali distribuzioni come un continuo, cioè come un insieme infinito di dislocazioni infinitesime.

Si tratta in sostanza di effettuare una operazione di tendenza al limite, la quale ha però l'inconveniente di far cadere la definizione di circuito di Burgers poiché non è più possibile definire un circuito

reticolare con tali proprietà, a causa della perdita di congruenza dello spazio occupato dal solido.

Questo problema viene risolto matematicamente sostituendo al vettore spostamento elastico di un punto, l'incremento infinitesimo di tale vettore su una distanza infinitesima, mediante la somma vettoriale dei prodotti di un tensore, caratteristico dello stato locale di distorsione, con i vettori che rappresentano la variazione locale di uno dei versori di riferimento.

L'integrale di tali incrementi, lungo un qualsiasi circuito chiuso nel materiale, risulta allora equivalente al vettore di Burgers della dislocazione ordinaria e permette di definire il "contenuto" di dislocazione, ovvero "l'entità" del difetto, in un punto qualunque di una dislocazione di Somigliana.

Possiamo solo accennare al fatto che tale tensore, indicato generalmente  $\alpha_{ij}$  <sup>(8)(9)(10)</sup>, ha trovato ad opera di alcuni autori <sup>(11)(12)</sup>, la sua sede naturale nell'ambito di una geometria a più dimensioni di tipo non - Riemanniano.

Per concludere, dobbiamo far notare che molti sono i problemi ancora da risolvere nell'ambito della rappresentazione modellistica di fratture mediante dislocazioni. Il formalismo matematico (piuttosto robusto) che ne è risultato, non sempre si è accompagnato ad una visualizzazione reale della crepa mediante tali difetti. Comunque per alcune semplici o particolari geometrie, molti sono già i modelli proposti <sup>(13)(14)</sup>.

Si vuole ricordare infine un tentativo, proposto dagli autori <sup>(15)</sup>, di rappresentazione del carattere (spaziale o piano) di una cricca in termini di interazione di piani di slittamento e quindi, di dislocazioni.

#### BIBLIOGRAFIA

- 1) WEINGARTEN G., "Sulle superficie di discontinuità nella teoria della elasticità dei corpi solidi". Rend. Acc. Lincei (ser.5), X (1° sem.), pp. 57-60 (1901)
- 2) VOLTERRA V., "Un teorema sulla teoria della elasticità". Rend. Acc. Lincei, XIV, pp. 127-137 (1° sem. 1905)
- 3) VOLTERRA V., "Sull'equilibrio dei corpi elastici più volte connessi". Rend. Acc. Lincei, XIV, pp. 193-202 (1° sem. 1905)
- 4) VOLTERRA V., "Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes". Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., XXIV, pp. 403-517 (1907)
- 5) SOMIGLIANA C., "Sulle deformazioni elastiche non regolari". Atti del IV Congresso Internazionale dei Matematici (Roma 6-11 apr. 1908), III, pp.60-72 (1909)
- 6) SOMIGLIANA C., "Sulla teoria delle distorsioni elastiche. Nota I". Rend. Acc. Lincei, XXIII, pp. 463-472 (1° sem. 1914)
- 7) SOMIGLIANA C., "Sulla teoria delle distorsioni elastiche. Nota II". Rend. Acc. Lincei, XXIV, pp. 655-666 (1° sem. 1915)
- 8) NYE J.F., "Some Geometrical Relations in Dislocated Crystals". Acta Met., I, pp. 153-163 (mar. 1953)
- 9) ESHELBY J.D., "The Force on an Elastic Singularity". Phil. Trans. A, CCXLIV, pp. 87-112 (1951)
- 10) BILBY B.A., "Types of Dislocation Source", in: THE PHYSICAL SOC., Defects in Crystalline Solids. Report of the Conference on Defects in Crystalline Solids held at the H.H.Wills Physical Laboratory University of Bristol, July 1954. Ed. The Physical Soc., London (1955)
- 11) BILBY B.A., BULLOUGH R., SMITH E., "Continuous Distributions of dislocations: a New Application of the Methods of Non-Riemannian Geometry". Proc.Roy.Soc.of London, CCXXXI, pp. 263-273 (1955)
- 12) BILBY B.A., SMITH E., "Continuous Distributions of Dislocations". Proc. Royal Soc. of London, A, CCXXXVI, pp. 481-505 (1956)
- 13) BILBY B.A., ESHELBY J.D., "Dislocations and the Theory of Fracture", in: LIEBOWITZ H., Fracture. An Advanced Treatise. Vol. I: Microscopic and Macroscopic Fundamentals. Ed. Academic Press, New York (1968) cfr. pp. 99-182
- 14) WEERTMANN J., "Rate of Growth of Fatigue Crecks Calculated from the Theory of Infinitesimal Dislocations Distributed on a Plane". Intern. J. Fract. Mech., II, pp. 460-467 (1966)
- 15) GATTO F., OTTOLINI L., "Su una interpretazione modellistica di fra<sup>t</sup>ture a deformazione spaziale", in: Congresso di Chimica dello Stato Metallico, Torino 6-9 luglio 1982 - Rendiconti. Editrice Universitaria Levrotto & Bella, Torino (1982) cfr. 242-248