



## Weight function for corner crack nearby intersecting cylindrical holes

### Funzioni peso per cricche ad angolo in corrispondenza di intersezione di fori

E. Salvati, P. Livieri, R. Tovo

*Dipartimento di Ingegneria Meccanica, Università di Ferrara, via Saragat 1, 44122, Ferrara  
enrico.salvati@unife.it, paolo.livieri@unife.it, roberto.tovo@unife.it*

**ABSTRACT.** Intersecting holes inside mechanical component, stressed with internal pressure, generate stress intensification; this kind of geometry detail is very common in the powertrain field. Triangular flaws has been taken into account at the intersection of two holes inside a specified specimen. Influence of bore hole  $D_1/D_2$  and angle between their axes  $\alpha$  are examined. Numerical analysis are performed to determine Stress Intensity factors (SIF) in many geometric configurations. Afterwards, fitting weight function's parameters with FEM results, new SIF analytics expression are shown. Finally, the accuracy of weight functions in SIF predictions for different inner pressure has been checked.

**SOMMARIO.** L'intersezione di condotti cilindrici sollecitati da una pressione interna è sede di concentrazione di tensione. La memoria affronta il problema del calcolo dello Stress Intensity Factors (SIF) di cricche che nucleano in prossimità dell'intersezione di fori cilindrici ad assi complanari. Modelli FEM tridimensionali sono utilizzati per valutare, nel punto mediano, lo SIF di cricche triangolari per poi calcolare la weight function relativa a sollecitazioni di modo I. Sono presi in esame il rapporto fra i diametri dei due fori cilindrici e l'angolo formato dai loro assi. Infine, viene verificata la precisione della weight function nel calcolare lo SIF quando i due condotti sono interessati da una pressione interna.

**KEYWORDS.** Weight Function; Stress Intensity Factors; Intersecting Holes; Finite Element Method; Fracture Mechanics

#### INTRODUZIONE

L'intersezione di fori in pressione all'interno di componenti meccanici dà luogo ad una intensificazione delle tensioni. Questa tipologia di dettaglio strutturale è molto diffusa nell'ambito della moto propulsione dove la necessità di contenere fluidi aventi pressioni sempre più elevate è in continuo aumento.

Nei collettori che distribuiscono fluido ad elevate pressioni l'innescò di cricche in corrispondenza dell'intersezione di due condotti, è un fenomeno comune [1]. La successiva propagazione può essere arrestata o rallentata qualora fossero presenti tensioni residue derivanti da trattamento di autofrettaggio. Test sperimentali a fatica, eseguiti con pressioni pulsanti su dettagli strutturali con due condotti cilindrici intersecanti, hanno dimostrato come l'autofrettaggio può incrementare il limite a fatica di un fattore di circa 2 qualora i fori abbiano ugual diametro e l'angolo  $\alpha$  fra gli assi dei cilindri sia di  $90^\circ$  [2]. Tale processo di autofrettaggio induce uno stato di tensione residua di compressione che può essere quantificato con analisi FEM [3], o in alcuni casi anche per via analitica [4 e 5]. Per poter studiare la propagazione per fatica è necessaria la

conoscenza del fattore di intensificazione delle tensioni effettivo  $K_{eff}$  che racchiude in sé le varie componenti di sollecitazione. La forma della cricca che nuclea in corrispondenza di due fori intersecanti soggetti ad una pressione interna variabile non è immediata da calcolare e necessita di una schematizzazione bidimensionale. In generale, i problemi di cricche piane di forma qualunque sono alquanto complessi e per avere soluzioni in forma chiusa direttamente applicabili senza la necessità di dover sviluppare particolari algoritmi di calcolo, è necessario limitare l'analisi ai termini del primo ordine [6, 7]. Tuttavia, per risolvere ingegneristicamente, il problema di una cricca d'angolo nucleata all'incrocio fra due condotti cilindrici, è possibile assumere, in accordo con quanto fatto nel riferimento bibliografico [3], che la cricca abbia una forma triangolare simmetrica concentrando l'attenzione sul valore dello Stress Intensity Factor (SIF) in mezzeria della cricca. Questo modo di procedere è sicuramente una approssimazione del problema, ma consente di stimare in modo rapido, se il range dello SIF imposto dai carichi esterni pulsanti è superiore al relativo valore di soglia del materiale portando ad un aumento della dimensione della cricca.

L'obiettivo del seguente contributo, è quello di mettere a disposizione del progettista, una weight function che faciliti il calcolo dello SIF noto il rapporto fra i due diametri dei condotti e l'angolo formato dai loro assi. Saranno calcolati i coefficienti della weight function proposta da Shen e Glinka [8] considerando uno sviluppo in serie di tre termini [9]. Infine, la weight function proposta sarà confrontata, nel calcolo dello SIF, con i risultati ottenuti da elaborazioni numeriche di analisi FEM che vedranno condizioni di carico derivanti da una pressione interna.

## IL PROBLEMA DELLA INTENSIFICAZIONE DELLE TENSIONI NELL'INCROCIO DI DUE CONDOTTI IN PRESSIONE

L'intersezione di fori cilindrici comporta una concentrazione delle tensioni tangenziali nella zona di intersezione qualora siano sollecitati da una pressione interna. La Fig. 1 riporta una tipica configurazione di due fori complanari con differente diametro e con gli assi di simmetria inclinati di un angolo  $\alpha$  ricavati da una matrice di materiale cilindrica che rappresenta in modo schematico il componente meccanico. Muovendosi lungo una generatrice, la tensione tangenziale incrementa in modo sensibile fino ad arrivare ad un valore massimo in corrispondenza della zona di intersezione. Le Fig. 2 e 3 evidenziano il problema della concentrazione delle tensioni qualora i due condotti siano sollecitati da un fluido in pressione. La tensione  $\sigma_z$ , sul piano di taglio, coincide con la tensione tangenziale lungo la generatrice ed incrementa di circa un fattore 6 nel passare da una zona indisturbata al punto di incrocio.

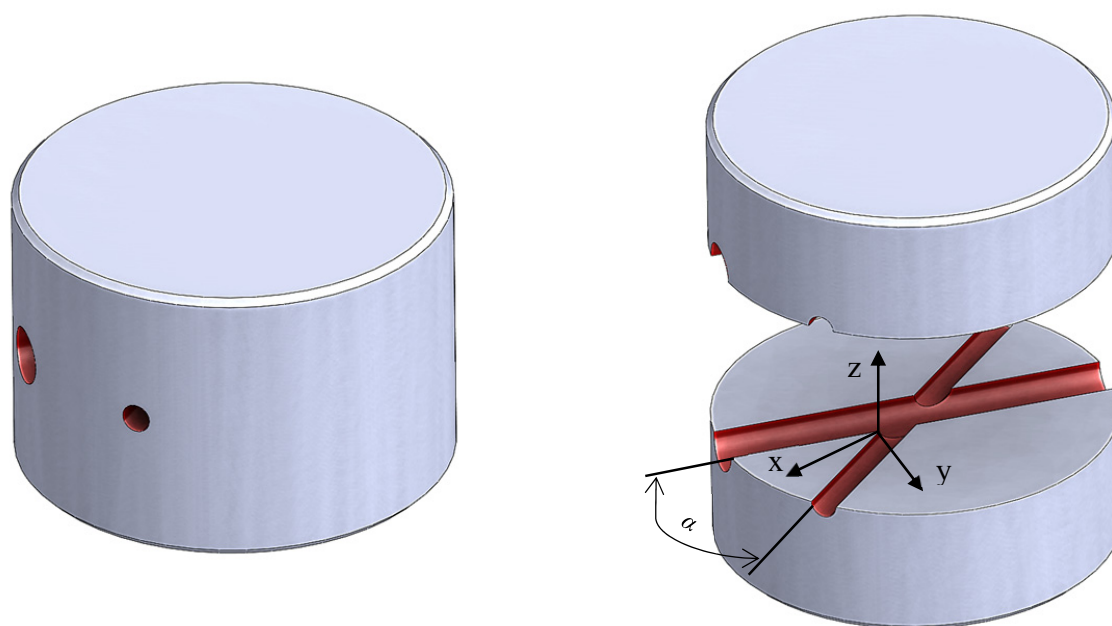


Figura 1: Esempio di una intersezione di due condotti cilindrici.

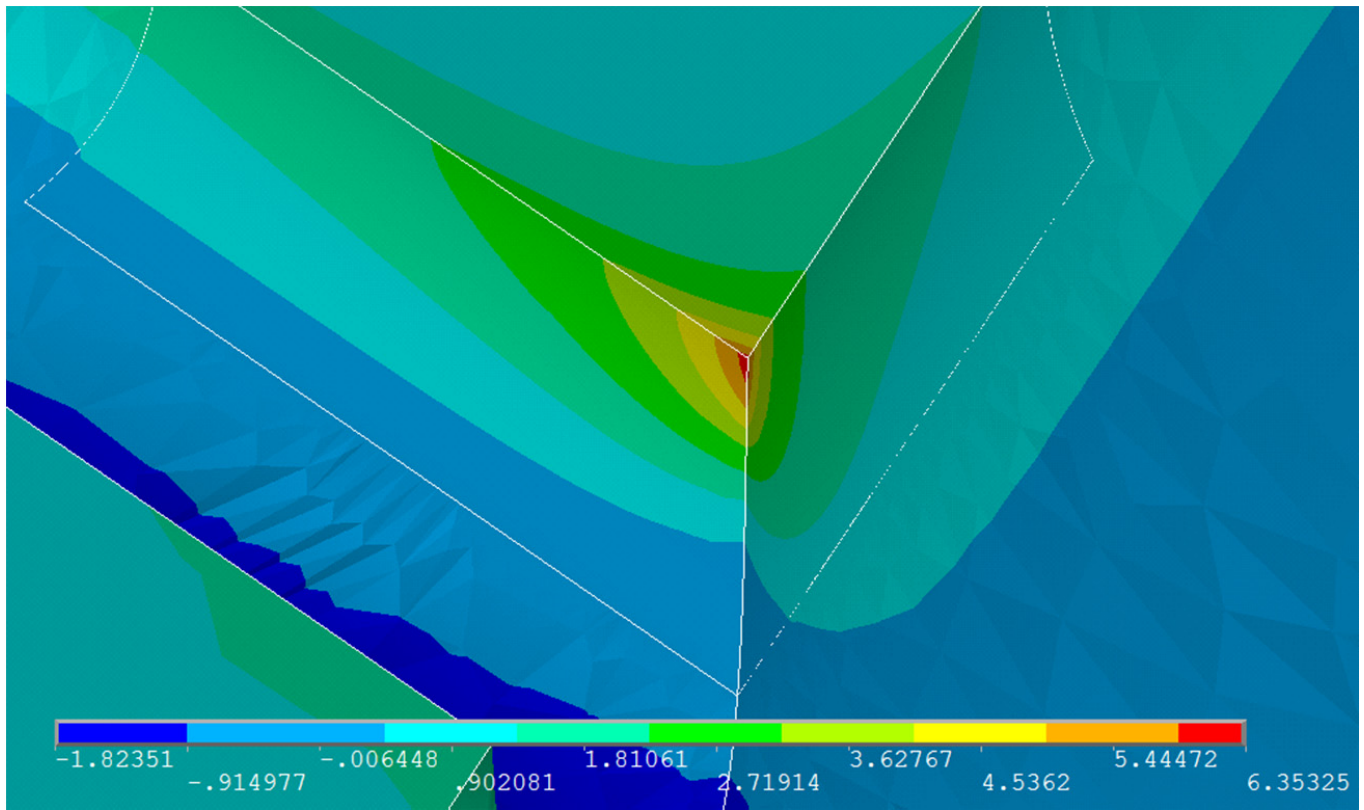


Figura 2: Contour tensione  $\sigma_{\xi}$  ( $p=1$  MPa,  $D_1/D_2=2$ ,  $\alpha=45^\circ$ ).

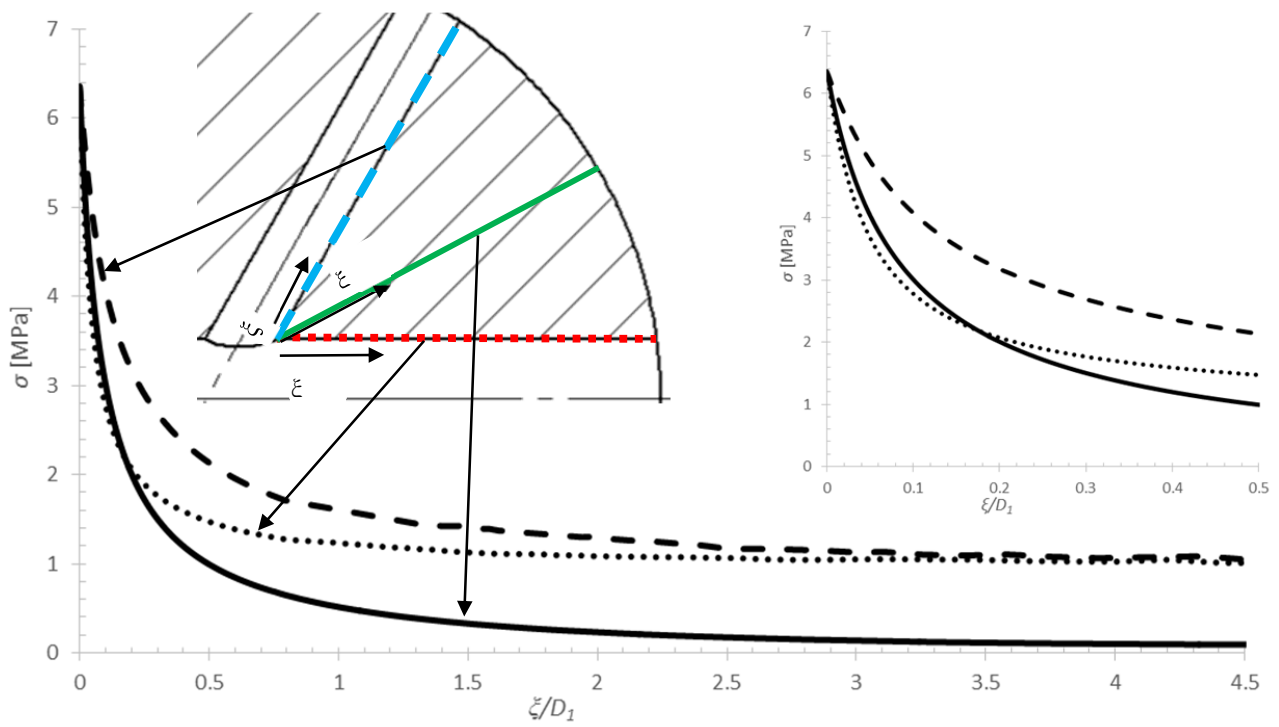


Figura 3: Andamento tensione tangenziale ( $p=1$  MPa,  $D_1/D_2=2$ ,  $\alpha=45^\circ$ ).

## IL METODO DELLE FUNZIONI PESO PER IL CALCOLO DELLO SIF

**N**ei componenti meccanici contenenti dei difetti assimilabili a cricche, il calcolo della loro capacità di carico statica o la possibilità di valutare la velocità di crescita del difetto, legata ad un carico variabile nel tempo, è legata al calcolo dello Stress Intensity Factor (SIF) della cricca. Noto lo SIF, il progettista ha modo di garantire la vita di servizio del componente oppure valutare se è raggiunto un certo livello di sicurezza. Questi tipi di analisi vengono sviluppati utilizzando modelli di meccanica della frattura e nonostante siano reperibili in vari manuali i valori degli SIF [10 e 11] è ancora difficile trovare soluzioni adeguate per molti problemi pratici.

L'obiettivo del presente lavoro è quello di valutare lo SIF di cricche d'angolo che nucleano in prossimità di un incrocio di due fori cilindrici. In questo lavoro preliminare, si assume che la forma della cricca sia triangolare (Fig. 1c) disposta simmetricamente rispetto alla bisettrice dell'angolo  $\alpha$  formato dall'incrocio dei due assi dei fori. Questa assunzione è in accordo con quanto fatto in [12] dove, oltre ad aver monitorato a posteriori la vera forma della cricca nucleata nel punto di intersezione, è stata proposta tale esemplificazione lineare per agevolare il calcolo dell'allungamento della cricca sotto un carico pulsante.

Per rendere di validità generale il calcolo dello SIF e non legato ad uno specifico tipo di carico, si è deciso di utilizzare il metodo delle weight function [13, 14] assumendo lo sviluppo in serie di Sha e Yang [9] troncato al terzo ordine. Il modello geometrico di riferimento per la valutazione della weight function è riportato in Fig. 4.

Con il metodo delle weight function il  $K_I$  è calcolato mediante l'integrazione del prodotto fra la funzione peso  $m(x,a)$  e la tensione  $\sigma_z(x)$ , quest'ultima valutata sul componente non criccato in direzione ortogonale al piano nel quale si svilupperà la cricca:

$$K_I(a) = \int_0^a \sigma_z(x) \cdot m(x,a) dx \quad (1)$$

Nella (1)  $a$  rappresenta la dimensione della cricca misurata lungo la bisettrice. Ovviamente, con riferimento alla Fig. 4c, con la (1) si è in grado di valutare correttamente il valore dello SIF nel punto mediano A della cricca, mentre, se è di interesse un altro punto del bordo della cricca, si dovrà modificare la weight function adeguandola di volta in volta. In questo modo si sostituiscono degli integrali di superficie con una serie di funzioni peso ad una sola variabile [15].

Il metodo delle weight function è di validità generale e la funzione peso è legata alle componenti di spostamento in prossimità del fronte di cricca come proposto da Bueckner [13] e Rice [14] nel seguente modo:

$$m(x,a) = \frac{E'}{K_{Ir}} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial a} \quad (2)$$

In cui  $E'$  è il modulo di elasticità per stati piani di tensione, mentre, diventa  $E' = E/(1-\nu^2)$  per stati piani di deformazione ( $\nu$  modulo di Poisson),  $K_{Ir}$  è lo SIF di un caso preso a riferimento ed  $u_r$  è il relativo *crack opening displacement*.

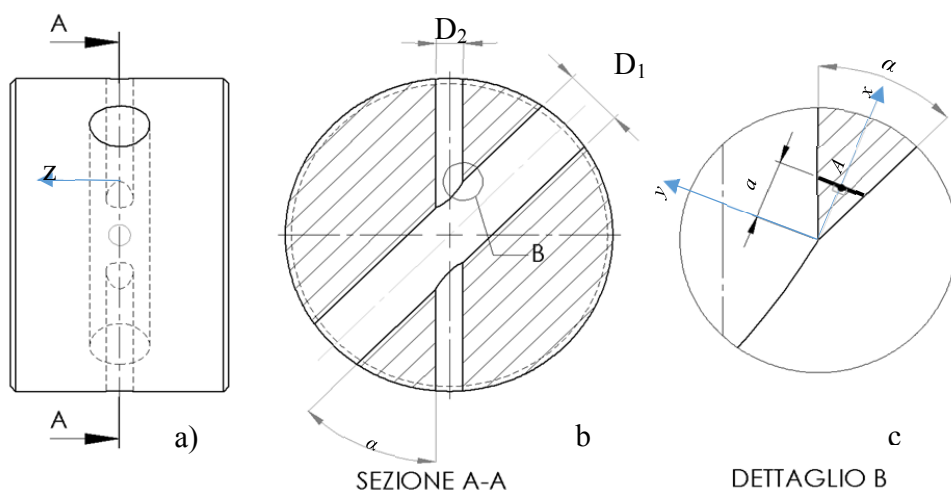


Figura 4: Geometria di riferimento.



La (2) richiede la conoscenza dell'intero campo degli spostamenti sopra la cricca oltre che la conoscenza di un  $K_{I_r}$  di riferimento. Grazie al lavoro condotto da Petroski e Achenbach [16], Shen e Glinka [8] formularono la scrittura di una efficiente funzione peso scritta generalizzata da Sha e Yang [9], che considera uno sviluppo in serie di termini non singolari pesati dai parametri  $M_i$ :

$$m(x, a) = \frac{2}{\sqrt{[2\pi(a-x)]}} \left[ 1 + M_1 \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{1/2} + M_2 \left(1 - \frac{x}{a}\right) + M_3 \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{3/2} + \dots + M_n \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{n/2} \right] \quad (3)$$

In letteratura è stato ampiamente verificato che l'Eq. (3) è applicabile ad una vasta gamma di casi di interesse ingegneristico anche per cricche aventi una forma bidimensionale di tipo ellittico [15]. Inoltre, in diversi lavori proposti da Glinka e Shen [17] è stato mostrato che la formulazione con tre termini è sufficientemente accurata comportando errori inferiori all'1%.

Il problema del calcolo della funzione peso viene perciò spostato alla valutazione dei parametri  $M_i$  che possono essere calcolati in vari modi. Per esempio, se si conoscono tre casi di riferimento relativi a tre differenti distribuzioni di carico agente sopra la cricca, noti i tre SIF  $K_{I_{ri}}$ , è possibile impostare il seguente sistema lineare nelle incognite  $M_i$ :

$$K_{I_{r1}} = \int_0^a \sigma_{\tilde{x}1}(x) \frac{2}{\sqrt{[2\pi(a-x)]}} \left[ 1 + M_1 \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{1/2} + M_2 \left(1 - \frac{x}{a}\right) + M_3 \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{3/2} \right] dx \quad (4)$$

$$K_{I_{r2}} = \int_0^a \sigma_{\tilde{x}2}(x) \frac{2}{\sqrt{[2\pi(a-x)]}} \left[ 1 + M_1 \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{1/2} + M_2 \left(1 - \frac{x}{a}\right) + M_3 \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{3/2} \right] dx \quad (5)$$

$$K_{I_{r3}} = \int_0^a \sigma_{\tilde{x}3}(x) \frac{2}{\sqrt{[2\pi(a-x)]}} \left[ 1 + M_1 \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{1/2} + M_2 \left(1 - \frac{x}{a}\right) + M_3 \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{3/2} \right] dx \quad (6)$$

Nel presente lavoro i  $K_{I_{ri}}$  saranno calcolati in funzione della geometria con l'ausilio degli elementi finiti costruendo, di volta in volta, dei modelli numerici tridimensionali adeguati alla geometria di Fig. 4.

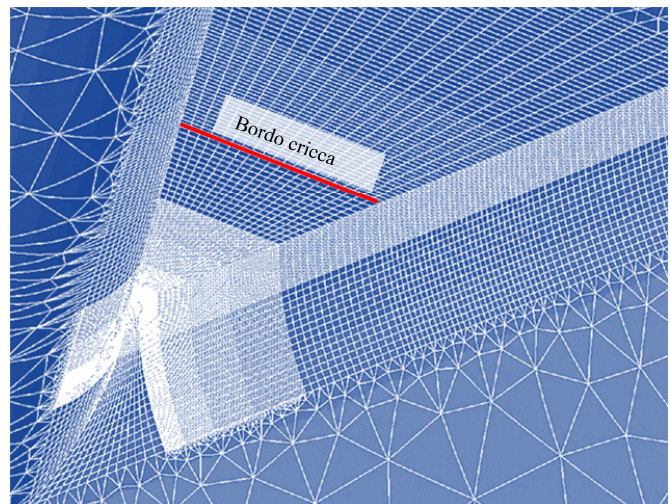
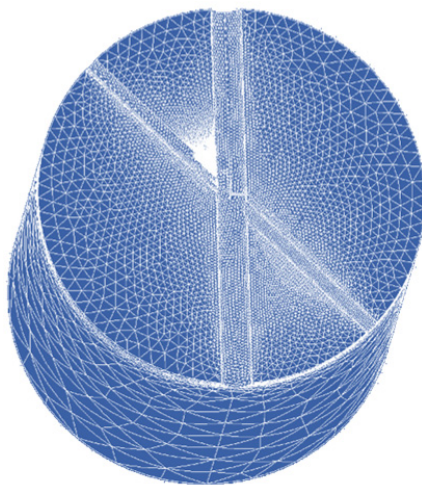


Figura 5: Modello agli elementi finiti usato per il calcolo dello SIF del punto A.

## CALCOLO NUMERICO DELLO SIF DI CRICCHE BIDIMENSIONALI

Grazie a simulazioni di tipo numerico è possibile ottenere i fattori di intensificazione delle tensioni sul bordo di una cricca piana bidimensionale posta nel punto di interesse applicando il principio di sovrapposizione di Bueckner. Sfruttando le potenzialità del software di calcolo agli elementi finiti ANSYS [18] è possibile utilizzare

il comando KCAL che permette di ricavare, in modo rapido ed efficiente, i fattori di intensificazione delle tensioni. Il modello numerico è stato realizzato infittendo gli elementi in prossimità dell'apice della cricca come mostrato in Fig. 5. In ogni porzione di cricca è stato applicato un carico uniforme, mentre sulla rimanente parte di superficie si è imposto una condizione di spostamento nullo in direzione ortogonale al piano di simmetria.

Il modello solido è suddiviso in diversi sottodomini che facilitano la modifica delle condizioni al contorno al fine di calcolare gli SIF per diverse dimensioni  $a$  della di cricca. Inoltre, viene sfruttata la condizione di simmetria rispetto al piano dove la cricca propaga. Il modello è caricato da una pressione unitaria di 1 MPa agente sulla superficie di frattura per le varie profondità considerate. In Fig. 6 è possibile notare la zona deformata che coincide, di fatto, con l'area dove è applicato il carico.

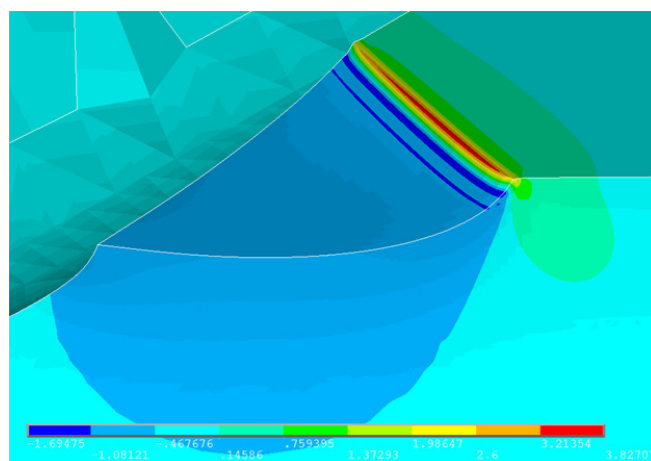


Figura 6: Deformata del modello e contour dello sforzo principale massimo per un carico unitario applicato alla superficie della cricca.

## CALCOLO DELLA FUNZIONE PESO

**P**er la cricca triangolare di Fig. 4, in virtù di quanto descritto sopra, si decide di utilizzare una funzione di forma avente tre parametri:

$$m(x, a) = \frac{2}{\sqrt{[2\pi(a-x)]}} \left[ 1 + M_1 \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{1/2} + M_2 \left(1 - \frac{x}{a}\right) + M_3 \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{3/2} \right] \quad (7)$$

Con l'obiettivo di risolvere il sistema di equazioni (4-6) risulta necessario avere a disposizione i fattori di intensificazione delle tensioni per una cricca di profondità stabilita e tre differenti condizioni di carico. Recenti lavori eseguiti da Herz et al. [12] hanno evidenziato che, per  $D_1/D_2=1$  e  $\alpha=90^\circ$ , l'andamento dei parametri  $M_2$  ed  $M_3$  è stato assunto costante lungo la direzione di propagazione della cricca e pari rispettivamente a 3 e -3. In questo preliminare lavoro, si adatterà tale ipotesi esemplificativa, mantenendo costanti  $M_2$  ed  $M_3$  relegando così la variabilità dei parametri  $M_i$  solo su  $M_1$ . A posteriori, sulla base di un confronto fra risultati numerici FEM e i relativi valori calcolati con la (7), sarà verificata la correttezza di tale assunzione al variare delle condizioni di carico. La ricerca della funzione peso dunque si riconduce alla sola determinazione dell'andamento del parametro  $M_1$  al variare dalla profondità della cricca.

Con l'ausilio di un modellatore 3D sono state schematizzate cricche aventi profondità  $a$  variabile. Successivamente, dal post-processamento di analisi FEM sono stati stimati gli  $M_i$  in funzione della geometria dei condotti e della dimensione  $a$  della cricca.

Le configurazioni geometriche analizzate sono riassunte nelle Tab. 1 e 2.

Per un prefissato rapporto geometrico di diametri, si sono considerate sette differenti profondità di cricca per le quali sono stati calcolati, dai risultati FEM, gli SIF nel punto mediano. Nelle Fig. 7-9 sono riassunti gli andamenti di  $K_I$  per tutte le geometrie analizzate.

La risoluzione numerica della (7) permette di ottenere l'andamento del parametro  $M_1$ . In questo modo, interpolando i valori ottenuti per ogni singola geometria, si ottiene l'andamento del  $K_I$  in funzione della profondità della cricca.



Nelle Fig. 10-12 è messa in evidenza la variabilità di  $M_1$ . Inoltre, per una fissata dimensione della cricca, la Fig. 13 mostra come sia possibile interpolare il valore di  $M_1$  per angoli  $\alpha$  compresi fra 45 e 90°.

N°	$\alpha$ [°]	$D_1/D_2$	$a$ [mm]
1	90	1	0.1
2	90	2	0.3
3	90	4	0.6
4	90	8	1.0
5	60	1	1.5
6	60	2	2.5
7	60	4	4.0
8	60	8	
9	45	1	
10	45	2	
11	45	4	
12	45	8	

Tabella 2: Profondità di cricca analizzate.

Tabella 1: Configurazioni geometriche analizzate.

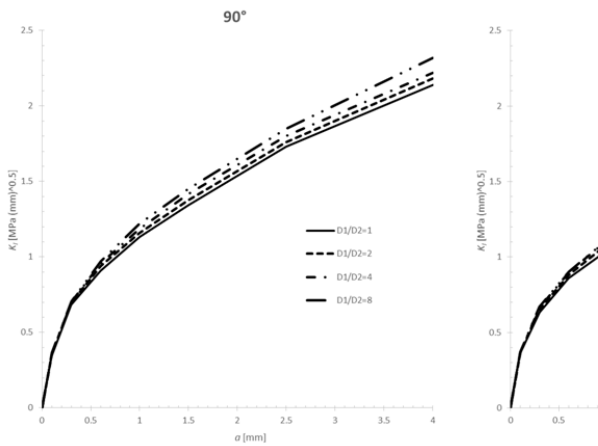


Figura 7: Andamento SIF geometria  $\alpha=90^\circ$ .

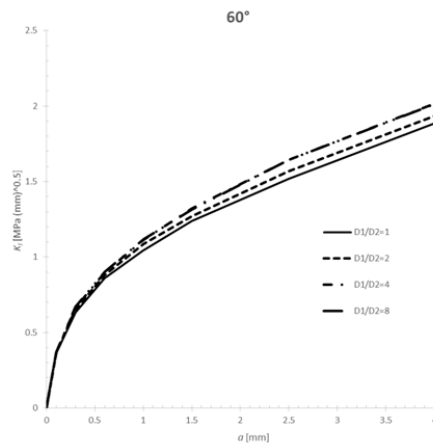


Figura 8: Andamento SIF geometria  $\alpha=60^\circ$ .

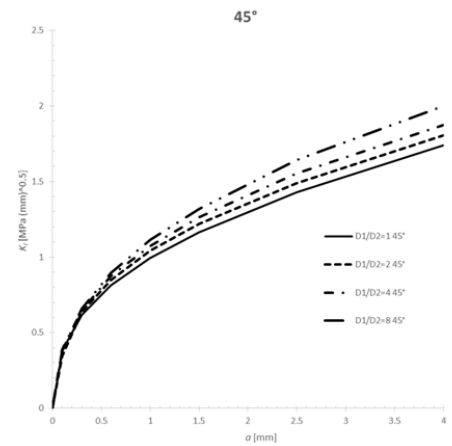


Figura 9: Andamento SIF geometria  $\alpha=45^\circ$ .

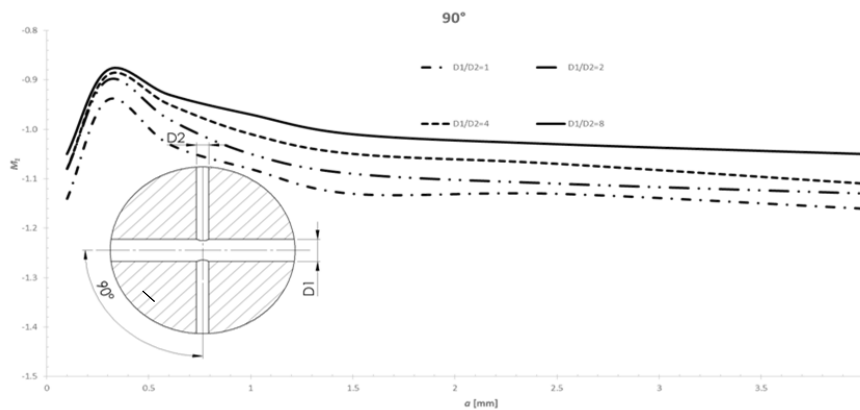


Figura 10: Andamento parametro  $M_1$  geometria  $\alpha=90^\circ$

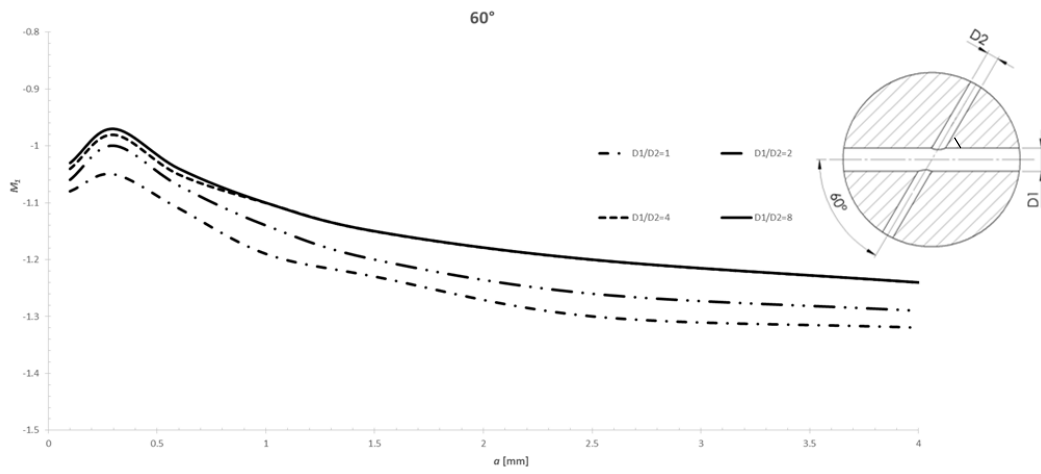


Figura 11: Andamento parametro  $M_I$ , geometria  $\alpha=60^\circ$ .

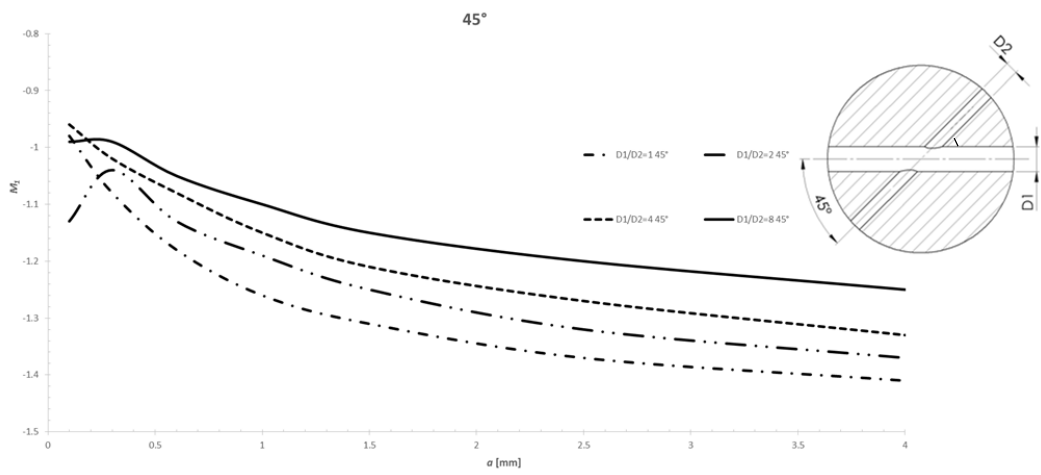


Figura 12: Andamento parametro  $M_I$ , geometria  $\alpha=45^\circ$ .

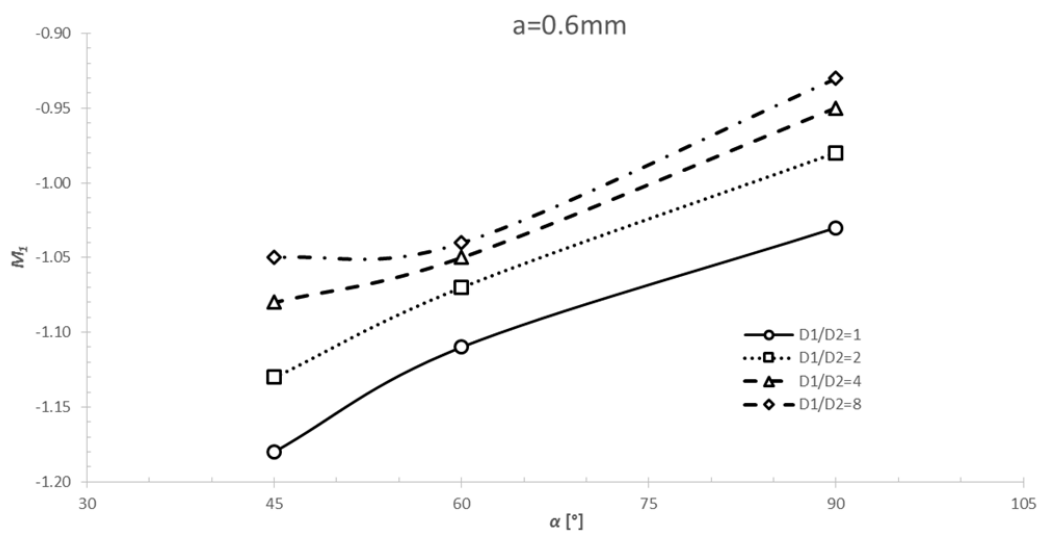


Figura 13: Variabilità di  $M_I$  per una prefissata dimensione della cricca.





## VERIFICA DELLA WEIGHT FUNCTION

Al fine di verificare la correttezza dell'ipotesi della costanza dei parametri  $M_2$  ed  $M_3$  della funzione peso nonché i valori di  $M_1$  calcolati, risulta necessario prendere in esame differenti tipologie di carico applicate al modello. La modalità di carico utilizzata prevede l'applicazione di una pressione agente unicamente sulle superfici dei condotti cilindrici (non si considera la pressione agente sulla superficie di cricca). Tale condizione di carico viene applicata per tutte le configurazioni di  $\alpha$  considerate, rapporto fra i diametri dei fori  $D_1/D_2$  pari a 2 e profondità di cricca  $a=1.5$  mm. La pressione applicata è unitaria (1 MPa). In aggiunta, si considera una condizione di carico mista, limitata ad una sola geometria. Tale condizione di carico simula la presenza di un calettamento con interferenza in uno dei due condotti; nell'esempio numerico la pressione nei condotti viene imposta rispettivamente pari ad 1 ed 1.5 MPa. Il calcolo numerico mediante il metodo agli elementi finiti, come visto in precedenza, permette di stimare con precisione lo SIF ( $K_{I,FEM}$ ) per le varie cicche posizionate come in Fig. 4. I valori calcolati, sono stati successivamente confrontati con quelli determinati con la weight function proposta:

$$K_{I,w} = \int_0^a \frac{2\sigma_z(x)}{\sqrt{[2\pi(a-x)]}} \left[ 1 + M_1 \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{1/2} - 3 \left(1 - \frac{x}{a}\right) + 3 \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{3/2} \right] dx \quad (8)$$

Nella (8) il valore di  $M_1$  sarà letto nei grafici 10-12. La tensione  $\sigma_z$ , relativa ai vari esempi trattati, è riportata in Tab. 3. Tale tensione fa riferimento alla geometria senza cricca ed ad un materiale lineare elastico. Gli errori in percentuale sono risultati nell'ordine del 5% e sicuramente accettabili a fronte delle esemplificazioni introdotte nella weight function.

Inoltre, è stato verificato che per  $D_1/D_2$  pari a 4 e con una pressione costante sulla superficie della cricca, è possibile ottenere dalla (2) l'andamento numerico della weight function (angolo  $\alpha$  di  $60^\circ$ , dimensione cricca  $a$  di 4 mm). Tale calcolo è stato possibile grazie alla determinazione, con gli elementi finiti, del *crack opening displacement* ottenuto senza infittire la mesh rispetto alle analisi viste in precedenza. Nella zona in cui la mesh era sufficientemente accurata, la weight function (7), calcolata con i coefficienti numerici delle Fig. 10-12, coincideva con la funzione definita dalla (2).

## CONCLUSIONI

Nel presente lavoro, dopo aver assunto una forma esemplificata di una cricca nucleata nel punto di intersezione di due condotti cilindrici in pressione, si è proposta una weight function per il calcolo dello Stress Intensity Factor (SIF) di modo I. Il confronto con i dati FEM ottenuto mettendo in pressione i due condotti, ha evidenziato errori, in media, del 5%. La weight function proposta permette di valutare lo SIF di una cricca d'angolo in modo estremamente rapido e risulta uno strumento di calcolo particolarmente utile per valutare l'influenza delle tensioni residue indotte da un processo di autofrettaggio.

## RINGRAZIAMENTI

Si ringrazia la O.M.T. di Torino per il supporto alle attività di ricerca.



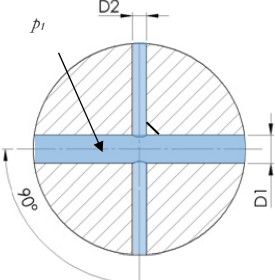
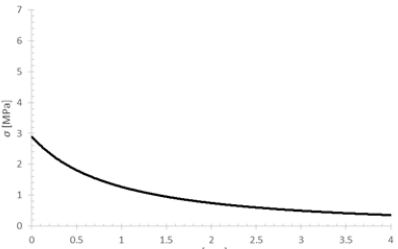
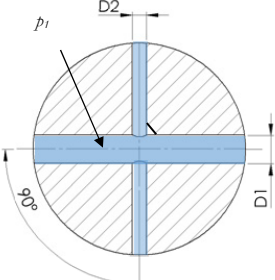
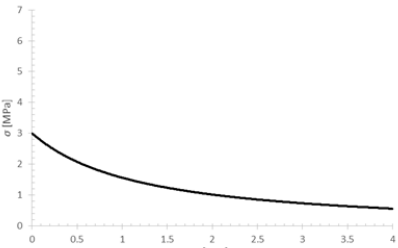
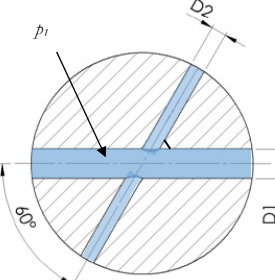
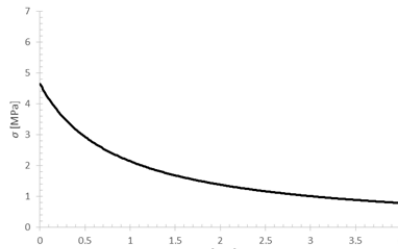
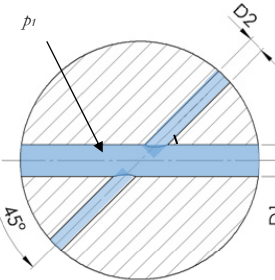
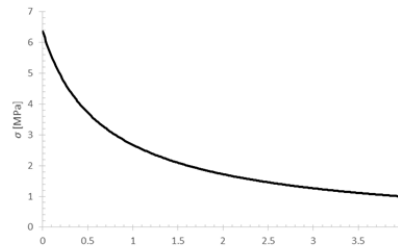
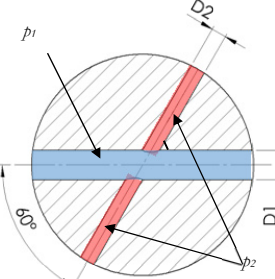
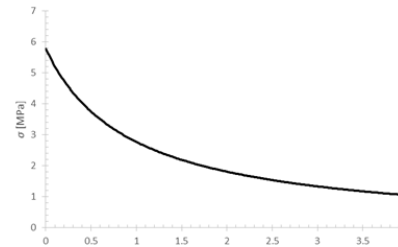
Descrizione problema	Risultati	Errore
 <p> <math>D_1/D_2=1</math>  <math>p_1= 1 \text{ MPa}</math>  <math>\alpha=90^\circ</math> </p>	 <p> <math>K_{I,FEM} = 1.71</math>  <math>K_{I,w} = 1.60</math> </p>	<p>6%</p>
 <p> <math>D_1/D_2=2</math>  <math>p_1= 1 \text{ MPa}</math>  <math>\alpha=90^\circ</math> </p>	 <p> <math>K_{I,FEM} = 2.12</math>  <math>K_{I,w} = 2.04</math> </p>	<p>4%</p>
 <p> <math>D_1/D_2=2</math>  <math>p_1= 1 \text{ MPa}</math>  <math>\alpha=60^\circ</math> </p>	 <p> <math>K_{I,FEM} = 3.46</math>  <math>K_{I,w} = 3.27</math> </p>	<p>5%</p>
 <p> <math>D_1/D_2=2</math>  <math>p_1= 1 \text{ MPa}</math>  <math>\alpha=45^\circ</math> </p>	 <p> <math>K_{I,FEM} = 3.11</math>  <math>K_{I,w} = 2.98</math> </p>	<p>4%</p>
 <p> <math>D_1/D_2=2</math>  <math>p_1= 1 \text{ MPa}</math>  <math>p_2= 1.5 \text{ MPa}</math>  <math>\alpha=60^\circ</math> </p>	 <p> <math>K_{I,FEM} = 3.46</math>  <math>K_{I,w} = 3.27</math> </p>	<p>5%</p>

Tabella 3: Verifiche con condizione di carico di pressione nei condotti.



## **BIBLIOGRAFIA**

- [1] E. Herz, O. Hertel, M. Vormwald, R. Thumser, In: Proc. of the 2<sup>nd</sup> Int. Conf. on Material and Component Performance under Variable Amplitude Loading, 2 (2009) 1265.
- [2] T. Seeger, M. Schon, J. Bergmann, M. Vormwald, Forschungsvereinigung Verbrennungskraftmaschinen e.V. (FVV), Frankfurt, Vorhaben, 478 (1994).
- [3] R. Thumser, J. W. Bergmann, M. Vormwald Int Journal of Pressure Vessels and Piping, 79 (2002) 113.
- [4] P. Livieri, P. Lazzarin, ASME- Journal of Pressure Vessel Technology, 124 (2002) 38.
- [5] R. Adibi-Asl, P. Livieri, ASME- Journal of Pressure Vessel Technology, 129 (2007) 411.
- [6] P. Livieri, F. Segala, International Journal of Solids and Structures, 47(9) (2010) 1167.
- [7] P. Livieri, F. Segala, Engineering Fracture Mechanics, 77 (2010) 1656.
- [8] G. Shen, G. Glinka, Theoretical Applied Fracture Mechanics, 15 (1991) 247.
- [9] G. T. Sha, C. T. Yang, ASTM, Philadelphia, (1986) 573.
- [10] H. Tada, P. Paris, G. Irwin, The Stress Analysis of Cracks handbook, 2<sup>nd</sup> edition, Paris Productions Incorporated, St. Luis, Missouri, (1985) 8.3.
- [11] Y. Murakami et. Al (Eds), Stress Intensity Factor handbook, Pergamon press, Oxford (1987).
- [12] E. Herz, O. Hertel, M. Vormwald, Engineering Fracture Mechanics, 78 (2011) 559.
- [13] H.F. Bueckner, Zeitschrift Angewandte Mathematik und Mechanik, 50 (1970) 529.
- [14] J. Rice, Int. J. of Solids Struct., 8 (1972) 751.
- [15] X. Niu, G. Glinka, Engng Fracture Mech., 36 (1990) 459.
- [16] H. Y. Petroski, F.D. Achenbach, Engng. Fracture Mech., 10 (1978) 257.
- [17] G. Glinka, G Shen, Engng Fracture Mech., 40 (6) (1991) 1135.
- [18] ANSYS Online Manuals Release 5.5, Structural, Fracture Mechanics (UP19980818), 10 (2013), [http://mostreal.sk/html/guide\\_55/g-str/GSTR10.htm](http://mostreal.sk/html/guide_55/g-str/GSTR10.htm)